

Teknisk rapport 2018:3

Beräkning och analys av stomnät

- med tonvikt på plana, terrestra nät

Clas-Göran Persson



Förord

Denna tekniska rapport har sitt fokus i beräkning och analys av plana, terrestert mätta stornät – dvs. det som brukar benämnas ”*triangelnät*” och baseras på traditionell längd- och riktningsmätning. Hela stornättningsprocessen berörs men mätning och mätinstrument – liksom rekognoscering, markering och övrigt fältarbete – behandlas bara ytligt.

Hanteringen av denna typ av nät innehåller i princip alla aspekter på stornätsberäkning och inkluderar de flesta av analysverktygen. Det är därför ganska enkelt att generalisera från 2D till 1D respektive 3D, vilket görs i slutet av rapporten. Ur pedagogisk synvinkel är det också enklare att göra en processbeskrivning – från A till Ö – genom att hålla sig till en enda tillämpning.

Rapporten har följande disposition:

- I **Kapitel 1** beskrivs den terminologi som tillämpas i den internationella standarden *GUM*. Dessutom introduceras *minsta-kvadratmetoden* och *normalfördelningen*, vilket utmynnar i HMK:s s.k. ”*trenivåprincip*” för stornätsanalys.
- Terminologin beträffande *referenssystem* samt den svenska geodetiska infrastrukturen redovisas i **Kapitel 2** och de viktigaste typerna av *stornät* beskrivs i **Kapitel 3**.
- Själva mätförfarandet behandlas översiktligt i **Kapitel 4**, inklusive kontroller i fält och korrekationer av mätningar. Dessutom introduceras begreppen *slumpmässiga avvikelser*, *systematiska effekter* och *grova fel* i samband med mätning.
- I **Kapitel 5** beskrivs *utjämning* av stornät och i **Kapitel 6** analys av sådana beräkningar, inkl. begreppen *data-snooping*, *kontrollerbarhet* och *tillförlitlighet*.
- I **Kapitel 7** behandlas *koordinattransformation* som analysmetod, i **Kapitel 8** introduceras begreppen *fri* och *fast* utjämning av stornät och i **Kapitel 9** beskrivs förfarandet vid *nätsimulering*.
- Hela *stornättningsprocessen* från planering till redovisning sammanfattas i **Kapitel 10** i form av en processbeskrivning med avstämningspunkter.
- I **Kapitel 11** görs en generalisering från två-dimensionella triangelnät till *stornät i höjd*, *polygontåg/polygonnät* samt *3D-nät*.

Varje kapitel avslutas med några ”visdomsord” och här och var i texten finns viktiga påpekanden markerade med OBS.

- Några referenser, såväl äldre som nyare, har samlats i **Kapitel 12**. Litet av ett testamente efter ett liv "i stommätningens tjänst" 😊.
- I **Bilaga A** har de viktigaste facktermerna inom detta område samlats i form av en ordlista, som även inkluderar motsvarande engelska termer.
- I **Bilaga B** ges exempel på innehållet i en *teknisk specifikation* av ett stomnätsprojekt och en sammanställning görs av de viktigaste punkterna i en *stomnätsredogörelse*.
- Avslutningsvis, i **Bilaga C**, definieras begreppet "God mätsed".

Rapporten är inte utformad som en regelrätt *handbok*, för t.ex. upphandling av stomnätstjänster. Den är snarare tänkt som **underlag** för en sådan och har mer karaktären av *lärobok*. Ett annat syfte är att lyfta fram det i "gamla" HMK - från mitten av 1990-talet - som fortfarande är relevant och som bör ingå även i den nya HMK-serien; litet "retro" kan man kanske säga.

Av den anledningen finns det på flera ställen referenser till det äldre dokumentet [HMK - Geodesi: Stommätning](#) från 1993. Det benämns genomgående med kortnamnet *HMK-Stommätning 1993* - för att undvika förväxling med det nya dokumentet [HMK - Stommätning 2017](#). Det äldre dokumentet [HMK - Geodesi: GPS](#) får på motsvarande sätt kortformen *HMK - GPS 1993*.

Granskning av rapporten har utförts av Kent Ohlsson och Lars Jämtnäs, Lantmäteriet, samt Ronny Andersson, Sweco.

Frösön, Nyårsafton 2018

/Clas-Göran Persson

Ny version 2019-12-04:

Ett antal korrekturfel har rättats till och anpassningar har gjorts till förändringar i terminologin.

/Clas-Göran Persson

Innehållsförteckning

1	GUM – mätosäkerhet och lägesosäkerhet	5
2	Referenssystem	9
3	Stomnätstyper	10
4	Mätning, korrektioner och fältkontroll	12
5	Beräkning av stomnät	18
6	Data-snooping, kontrollerbarhet och tillförlitlighet.....	23
7	Koordinattransformation som analysverktyg	30
8	Fri och fast nätutjämnning	37
9	Nätsimulering	42
10	Stommättningsprocessen – från planering till resultatredovisning	46
11	Höjdnät, polygonnät och 3D-nät	48
	Tågformade nät.....	48
	Tre-dimensionella nät	53
12	Referenser	63
A	Ordlista	64
B	Teknisk specifikation och dokumentation/redovisning	69
C	God mätsed	75

1 GUM – mätosäkerhet och lägesosäkerhet

GUM

I **mätsammanhang** – och därför i HMK – har begreppet *noggrannhet* fått lämna plats för "mätosäkerhet", som härstammar från standarden *GUM: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*. Grundvalarna i denna internationella standard är följande:

- Den tidigare termen (mät)noggrannhet ersätts alltså av *mätosäkerhet*. Och osäkerheten i en positionsbestämning, ett **läge**, benämns på motsvarande sätt *lägesosäkerhet*.
- I GUM undviks termen *fel*, dvs. den avvikelse från det "sanna" värde som vi normalt inte känner. Mätosäkerhet är mer kopplad till vad som kan hänföras till själva **mätoperationen**. Begreppet "grovt fel" finns dock kvar även i GUM.

ISO-standarderna rörande *geografisk information* (ISO 19000-serien) – liksom motsvarande svenska standarder från SIS – har emellertid kvar termen "noggrannhet". (Detta trots att ISO tidigare har varit med om att fatta beslut om GUM.)

Uttalanden om mät- och lägesosäkerheten

Uttalanden om att "*mätosäkerheten är 17 mm*", liksom påståenden av typen "*noggrannheten är 2 meter*", är direkt felaktiga.

Mätosäkerhet är en *kvantitativ* term. Den måste först ges ett *mått* för att det ska vara möjligt att ange en *kvantitativ* uppgift, en sifferuppgift, om den aktuella mätningens osäkerhet. Detsamma gäller lägesosäkerhet, och alltså även för den äldre termen *noggrannhet*.

Det vanligaste måttet är *standardosäkerhet*, dvs. det som tidigare benämndes *medelfel* (ofta betecknat *sigma*, σ). Men det finns även andra mått, s.k. *utvidgad mätosäkerhet*:

- 2 gånger standardosäkerheten (*två sigma*, 2σ) är ett *konfidenstervall* med 95% *täckningsgrad*.
- 3 gånger standardosäkerheten (*tre sigma*, 3σ) brukar betraktas som ett grovt fel.

1:an, 2:an och 3:an i 1σ , 2σ resp. 3σ kallas *täckningsfaktor*, och det gäller alltså att veta vilken faktor som avses i uttalanden om mät- och lägesosäkerhet. Är det t.ex. ett mått på **genomsnittliga** avvikelser (ett sigma) eller **maximala** avvikelser (tre sigma) som avses? Eller är det, som ofta vid t.ex. navigering, något mitt emellan (två sigma)?

I Tabell 1.a ges några riktlinjer för terminologin vid formulering av osäkerhetsuppgifter med hjälp av standardosäkerhet.

Tabell 1.a. Exempel på mått/benämningar vid redovisning av mät- och lägesosäkerhet.

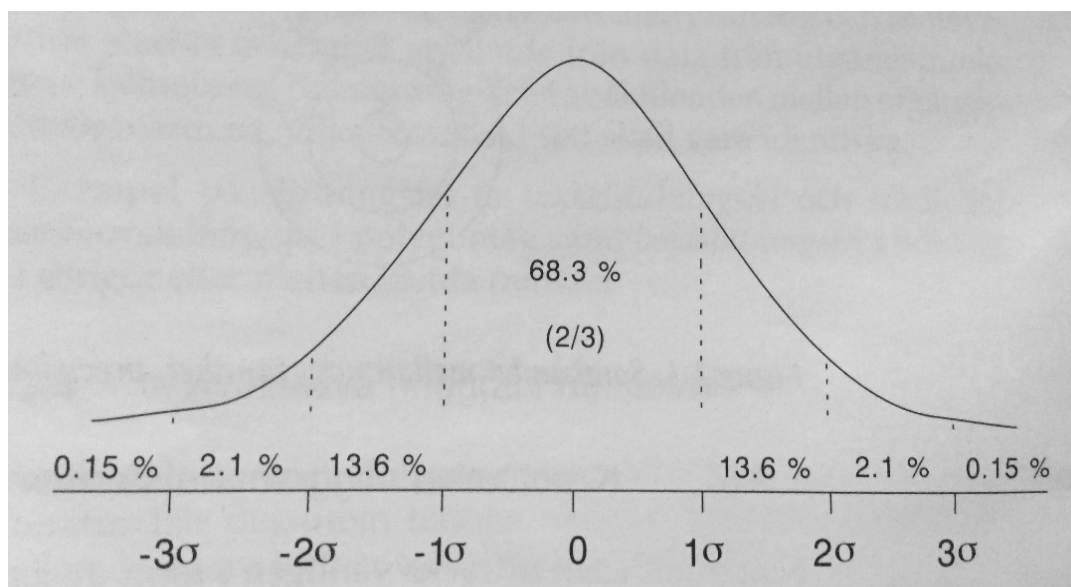
Osäkerhet som ska beskrivas	Mått/benämning
Mätosäkerhet	Mätningens standardosäkerhet
Lägesosäkerhet i höjd (1D)	Standardosäkerheten i höjd
Lägesosäkerhet i plan (2D)	Standardosäkerheten i plan
Lägesosäkerhet i 3D	Standardosäkerheten i 3D

Även om det kanske är att tänja litet på begreppen kan det ibland vara OK med litet svepande beskrivningar – t.ex. "en mätosäkerhet på millimeternivå" eller "lägesosäkerheten ligger på meternivå", bara för att ange storleksordningen.

Normalfördelningen och minsta kvadrat-metoden

Carl Friedrich Gauss är för evigt förknippad med *minsta kvadrat-metoden* och *normalfördelningen*. Andra personer hade publicerat arbeten om detta tidigare, men Gauss var den som gav koncepten en strikt beskrivning. Och han var definitivt den som först tillämpade dem inom geodesin, bl.a för beräkning av geodetiska nät.

Vissa uppgifter om den *en-dimensionella* normalfördelningen (1D) redovisas i Figur 1.



Figur 1. Den en-dimensionella normalfördelningen. %-siffrorna anger sannolikheten för respektive intervall. σ (sigma) anger aktuell standardosäkerhet.

Den teoretiska fördelningen ser litet annorlunda ut i 2D respektive 3D – särskilt beträffande 1σ , se Tabell 1.b.

Tabell 1.b. Konfidensgraden för 1σ , 2σ , 3σ - i en, två och tre dimensioner.

	1σ	2σ	3σ
1D	68,27%	95,45%	99,73%
2D	63,21%	98,17%	99,99%
3D	60,80%	99,30%	$100 - \varepsilon$ %

Vi kan alltså sammanfatta det hela med att 2σ ger en täckningsgrad på **minst** 95% - i en, två och tre dimensioner. Det är därför GUM rekommenderar att 2σ (täckningsfaktorn 2) används genomgående.

HMK:s trenivåprincip

Stomnätsberäkningar utförs genom *utjämning* enligt minsta-kvadratmetoden. Under antagandet om normalfördelning är det den mest effektiva metoden för lösning av överbestämde ekvationssystem. En samtidig beräkning av samtliga mätningar enligt denna metod benämns *sträng utjämning*.

För analys av sådana beräkningar används *HMK:s tre-nivåprincip*, som relaterar till normalfördelningen (Figur 1). Den motsvarar nivåerna 1, 2 respektive 3 sigma, dvs. täckningsfaktorerna 1, 2 och 3.

Följande nivåer ingår:

- I. Minst 2/3 av mätmaterialet bör ha avvikelser som är mindre än standardosäkerheten. Det är ett *fördelningstest*, ett test av att antagandet om normalfördelning är korrekt.
- II. Minst 95 % mätmaterialet bör ha avvikelser som är mindre än dubbla standardosäkerheten, som därmed utgör en *varningsgräns*.
- III. Ingen mätning ska ha en avvikelse som är större än tre gånger standardosäkerheten. Det är därför en ren *kassationsgräns*.

Principen är alltså härledd ur den en-dimensionella normalfördelningen men enligt resonemanget ovan kan den tillämpas även i 2D och 3D.

Därmed släpper vi den gamla termen *sigma*, med beteckningen σ , som är en historisk kvarleva från "gamla" HMK och "tiden före GUM". Fr.o.m. nu tillämpas GUM:s beteckningssystem i denna rapport, dvs.

$$u(l) = \text{standardosäkerheten i storheten } l$$

där bokstaven u associerar till *uncertainty*. Kvadraten $u^2(l)$ benämns *varians*.

Sammanfattande visdomsord

Uttalanden om mät- och lägesosäkerheten förutsätter att ett mått för osäkerheten är definierat. Det vanligaste måttet är standard-osäkerhet eller multiplar av detta mått, enligt HMK:s tre-nivåprincip.



2 Referenssystem

Referenssystem används för att lägesbestämma *geodata*. Dessa system realiseras i form av *stomnät* (eller *referensnät*), som bestäms genom *stommätning*. Som redan nämnts kan referenssystemen vara en-, två-, eller tre-dimensionella.

Systemen kan vara lokala eller globalt anpassade. *Lokala referenssystem* tas fram specifikt för ett projekt eller en tillämpning, ofta inom bygg- och anläggningsverksamheten. *Globalt anpassade referenssystem* är tillgängliga för "alla" och har en tydlig huvudman, t.ex. stat, kommun eller annan myndighet. Lägesbestämning med hjälp av sådana system benämns *georeferering* och utgör grunden för uppbyggnad av geodatabaser, sambearbetningar av geodata och GIS-analyser, kartpresentation etc.

I Sverige har Lantmäteriet etablerat det nationella, tredimensionella referenssystemet *SWEREF 99*. För att tillgodose behovet av plana (*projicerade*) koordinater finns även *SWEREF 99 TM*, som är en projektion med enhetlig medelmeridian för tillämpningar på nationell nivå. TM står för *Transversal Mercator*, även kallad *Gauss-Krügers projektion*.

Till *SWEREF 99* har också *lokala projektionszoner* definierats, för t.ex. kommunala tillämpningar. Dessa benämns efter sin *medelmeridian*. T.ex. betyder *SWEREF 99 18 00* (i Stockholmsområdet): "*Transversal Mercator-projektion av SWEREF 99 med medelmeridianen 18 grader, 00 minuter*".

Det moderna riksnätet i höjd är *RH2000* och i den nationella *geodetiska infrastrukturen* ingår även *referensstationsnätet SWEPOS*, för GNSS-mätning, samt *geoidmodellen SWEN17_RH2000* (se nästa avsnitt) och *landhöjningsmodellen NKG2016LU*.

Strävan är att åstadkomma enhetlighet över hela landet vad gäller referenssystem. Detta mål är i princip uppfyllt vad gäller *SWEREF 99*, medan det är en bit kvar innan övergången till *RH2000* är slutförd.

Sammanfattande visdomsord

Enhetliga, nationella referenssystem är en förutsättning för en effektiv hantering av geodata.



3 Stomnätstyper

I det dagliga arbetet utnyttjas vanligen stompunkter i *bruksnät*, s.k. *brukspunkter*. Eftersom lägesbestämning i dag kräver väldefinierade referenssystem över större områden ansluts vanligen bruksnäten till ett överordnat nät, ett *anslutningsnät*, som dessutom kan utgöra länken till *riksnätet*.

Höjdnät

Stomnät i höjd bestäms vanligen genom *avvägning*, även om *trigonometrisk* höjdmätning också förekommer. Höjdbestämning med satellitbaserad *GNSS-teknik* har vanligen något högre mätosäkerhet.

Stomnät i plan

Triangelnät och *polygonnät* är de traditionella nättyperna för stomnät i plan. Historiskt sett har de plana stomnäten bestämts genom *längd- och riktningsmätning* med *terrestra metoder*. Idag utförs dock den mesta stommätningen i 2D och 3D med satellitbaserad GNSS-teknik.

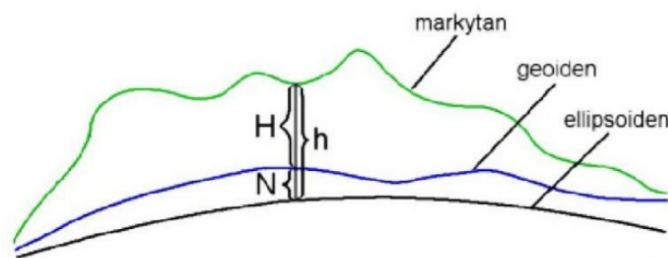
3D-nät

Tre-dimensionella nät bestäms uteslutande med GNSS, med undantag för lokala *specialnät* för bygg & anläggning.

Redovisningen i 3D kan antingen ske med *kartesiska koordinater* i ett rätvinkligt tre-dimensionellt system eller med *geodetiska koordinater*: *latitud*, *longitud* och höjd över *referensellipsoiden*. Höjden (h_i) över ellipsoiden kan sedan konverteras till höjd över geoiden (H_i) med formeln

$$h_i = H_i + N_i \Leftrightarrow H_i = h_i - N_i \quad (3.1)$$

där N_i är *geoidens* höjd över ellipsoiden i den aktuella punkten, se Figur 3.



Figur 3. Sambandet mellan markyta (topografi), geoid och ellipsoid.

Geoiden utgör referensyta för höjdrevisning och brukar definieras som "den ostörda havsytan och dess tänkta förlängning under kontinenterna". Idag tas geoidhöjderna (N_i) fram med hjälp av en *geoidmodell* – en databas ur vilken N_i -värdena kan hämtas eller interpoleras fram. En sådan modell är en förutsättning för höjdmätning med GNSS, som primärt ger höjder över ellipsoiden.

Passiva och aktiva nät

Stomnät/referensnät som användaren får tillgång till via *fysiska markeringar* på marken benämns *passiva nät*. *Aktiva nät* är t.ex. fasta referensstationsnät typ *SWEPOS*, som aktivt och i realtid sänder ut korrekationer för användarnas lägesbestämning.

Bestämning av aktiva nät ingår inte i denna beskrivning.

Syfte/funktion vs. utformning/kvalitet

Hur ett stomnät är tänkt att användas avgör helt hur det bör utformas och vilka kvalitetskrav som bör ställas.

Utformningen avser främst punkttätheten/punktavståndet samt stompunkternas placering och tillgänglighet. Kvalitetskraven bör ställas utifrån mätosäkerhet, lägesosäkerhet och tillförlitlighet, se Kapitel 4-6.

Kraven samlas lämpligen ihop i form av en *teknisk specifikation* och kravuppfyllelsen i en *stomnätsredogörelse*, se Kapitel 10 och Bilaga B.

Sammanfattande visdomsord

Även om den mesta mätningen i dag sker med satellitteknik är kunskap om terrester stommätning fortfarande värdefull:

- Det är bra att känna till hur stompunkterna man utgår ifrån har kommit till, konceptet kan generaliseras till dagens teknik och metodik och i vissa tillämpningar är terrester mätning fortfarande konkurrenskraftig.

Ett stomnäts syfte och funktion avgör dess utformning och kvalitet.



4 Mätning, korrektioner och fältkontroll

Längdmätning används för att bestämma *avstånd* mellan stompunkter.

Alla mätoperationer som utförs med teodolit brukar benämnas *vinkelmätning*. Men vinklar i horisontalplanet bestäms som differensen mellan två *mätta riktningar*, så där är termen *riktningsmätning* mer korrekt.

En mätt riktning är inte relaterad till koordinatsystemet. Det är däremot en *orienterad riktning*, i och med att även den s.k. *orienteringsvinkeln* är bestämd.

Vertikalvinkelmätning utförs för att lutningskorrigera mätta längder och för bestämning av *höjdskillnader*. Vanligen mäts den s.k. *zenitvinkeln*, dvs. vinkeln i vertikalplanet mellan *zenitriktningen* (uppåt ut efter *lodlinjen*) och riktningen mot det aktuella mätobjektet.

Mätosäkerhet

Traditionellt skiljer man mellan tre typer av avvikelser vid mätning:

- *slumpmässiga avvikelser*
- *systematiska effekter* och
- *grova fel*.

Mätningarnas standardosäkerheter är ett mått på de slumpmässiga avvikelserna, dvs. de normala variationer som alltid finns i mätningar. Effekten av dessa reduceras genom medeltal av upprepade mätningar.

De systematiska effekterna elimineras genom korrektioner och lämpligt valda mätmetoder – såsom riktningmätning i *helsatser*, dvs. i två *cirkellägen* (och medeltalsbildning även här).

Sökningen av grova fel baseras på jämförelser mellan upprepade mätningar, t.ex. dubbelmätning av längder, och analyser i samband med beräkningen.

Kunskap om mätosäkerheten är viktig för både beställare och utförare: dels för att kunna ställa korrekta och realistiska krav, dels för att kunna välja utrustning och metodik som uppfyller de krav som ställs. För utföraren gäller inte minst att ha kunskap om den egna utrustningens mätosäkerhet samt dess handhavande, service, kalibrering etc.

Hantering av slumpmässiga avvikelser

Standardosäkerheten för längd- respektive riktningmätning brukar anges enligt följande beskrivning från [HMK-Stommätning 1993](#).

Standardosäkerheten för längder har formen:

$$u(\text{längd}) = \sqrt{(A + B \cdot L)^2 + C^2} \text{ mm} \quad (4.1)$$

där

A = osäkerhetsfunktionens konstanta del (mm)

B = dess längdberoende del (mm/km, ppm)

C = centreringens standardosäkerhet (mm)

L = längden (km)

"Felgränserna" i [HMK - Stommätning 1993](#) utgår från A = 5 mm, B = 3 mm/km och C = 3 mm, vilket var representativa värden med den tidens teknik.

Standardosäkerheten för riktningar beskrivs av funktionen:

$$u(\text{riktning}) = \sqrt{\left(\frac{A}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(\frac{C}{L} \cdot \rho\right)^2} \text{ mgon} \quad (4.2)$$

där

A = standardosäkerheten i riktning för en helsats (mgon)

C = centreringens standardosäkerhet (mm)

n = antalet helsatser

L = siktlängden (km)

$\rho = 200 \cdot 10^{-3} / \pi \approx 0,063662$

HMK:s felgränser utgår här från värdena A = 0,8 mgon och C = 3 mm, men de instrumentspecifika parametervärdena redovisas i tillverkarnas faktablad. Formella standarder kan med fördel användas i dialogen beställare/utförare om valet av mätosäkerhet, se Tabell 4.a

Tabell 4.a. Klassindelning av totalstationer (SIS-TS 21143:2016). hv = horisontalvinkel, vv = vertikalvinkel, ppm = "parts per million" dvs. mm/km.

Klass	Användningsområden	Standardosäkerhet i hv-mätning (1 helsats)	Standardosäkerhet i vv-mätning (1 helsats)	Standardosäkerhet i längd
T1	Stommätning för industritillämpning och rörelsekontroller, samt kontrollmätning av byggnadsverk med särskilt höga krav.	0,15 mgon	0,15 mgon	1 mm + 1 ppm
T2	Bruksnät för infrastrukturprojekt t.ex. detalj- och kontrollmätning av spåranläggning, bro- och tunnelkonstruktioner och byggnadsverk.	0,3 mgon	0,3 mgon	1 mm + 2 ppm
T3	Övrig stommätning för utsättning och inmätning inom detaljplanelagda områden.	0,6 mgon	0,6 mgon	2 mm + 3 ppm
T4	Övrig detaljmätning.	2 mgon	2 mgon	5 mm + 5 ppm

Tabellens standard bygger på en *klassificering* av mätutrustning, där olika krav ställs beroende på användningsområde. De redovisade mätosäkerheterna förutsätter dels att riktningmätning utförs i båda cirkellägena (helsatsmätning), dels att totalstationen är kalibrerad och justerad på ett korrekt sätt.

Balansering av mätosäkerheten

Vid stommätning bör det råda balans vad gäller mätosäkerheten mellan längd- och riktningmätning, se Tabell 4.b.

Tabell 4.b. Balans mellan längd- och riktningmätning: Tvärmått uttryckta i vinkelmått. De **gulmarkerade** rutorna refererar till exemplet nedanför tabellen.

Avstånd (m)	Tvärmått (mm) översatta till vinkelmått (mgon)			
	2 mm	5 mm	10 mm	20 mm
0,01 km (10 m)	12,7 mgon	31,8	63,7	127,3
0,02 km (20 m)	6,4	15,9	31,8	63,7
0,05 km (50 m)	2,5	6,4	12,7	25,5
0,10 km (100 m)	1,3	3,2	6,4	12,7
0,20 km (200 m)	0,64	1,6	3,2	6,4
0,50 km (500 m)	0,25	0,64	1,3	2,6
1,00 km (1 000 m)	0,13	0,32	0,64	1,3
2,00 km (2 000 m)	0,064	0,16	0,32	0,64
5,00 km (5 000 m)	0,025	0,064	0,13	0,25

Exempel: En standardosäkerhet i riktningmätningen på 0,64 mgon motsvarar tvärmåttet 2 mm på avståndet 200 m, 5 mm på avståndet 500 m, 10 mm på avståndet 1000 m och 20 mm på avståndet 2000 m. För balans mellan längd- och riktningmätning bör alltså längdmätningen ha en motsvarande standardosäkerhet för angivna avstånd.

Omvänt, om standardosäkerheten i längd är 10 mm så krävs för balans en standardosäkerhet i riktningmätningen på 3,2 mgon på 200 m, 1,3 mgon på 500 m, 0,6 mgon på 1000 m och 0,3 mgon på 2000 m.

Ett sätt att skapa balans är att byta till en annan kombination av instrument, ett annat att variera antalet helsatser i riktningmätningen.

Vad gäller valet av modell för att beskriva osäkerheten vid riktningmätning bör man vara särskilt på sin vakt med korta sikter eller med att blanda korta och långa sikter i ett nät. Standardosäkerheten i vinkelmått blir annars extremt liten översatt till tvärmått. Detta belyses i Tabell 4.c och blir tydligt när vikter i utjämningen ska beräknas.

För att inte viktsättningsättningen ska bli helt orealistisk för korta sikter så kan centreringsosäkerheten sättas till $C \geq 0$ i Formel (4.2). Detta är särskilt viktigt vid avstånd < 200 meter.

Tabell 4.c. Standardosäkerheten i riktning översatt till tvärmått. I Alternativ 1 är centreringsosäkerheten i Formel (4.2) satt till $C = 0$ medan Alternativ 2 är beräknat med $C = 1$ mm ($\rho = 0,063662$).

Avstånd L	Alternativ 1 ($C = 0$) 0,3 mgon uttryckt som tvärmått (mm)	Alternativ 2 ($C = 1$ mm) $\sqrt{0,3^2 + (\frac{1}{L} \cdot \rho)^2}$ mgon uttryckt som tvärmått (mm)
0,01 km (10 m)	0,05	1,00
0,02 km (20 m)	0,09	1,00
0,05 km (50 m)	0,24	1,03
0,10 km (100 m)	0,47	1,11
0,20 km (200 m)	0,94	1,37
0,50 km (500 m)	2,36	2,56
1,00 km (1 000 m)	4,71	4,82
2,00 km (2 000 m)	9,42	9,48
5,00 km (5 000 m)	23,56	23,58

Men för att mätosäkerhetsuppgifterna ska gälla måste de systematiska effekterna korrigeras och grova fel i möjligaste mån elimineras.

Korrekationer av systematiska effekter

Redovisning i ett plant koordinatsystem förutsätter att de mätta ("verkliga") avstånden höjd- och projektionskorrigeras.

- Höjdkorrekturen görs för att reducera verkligt avstånd ned till referensellipsoiden.

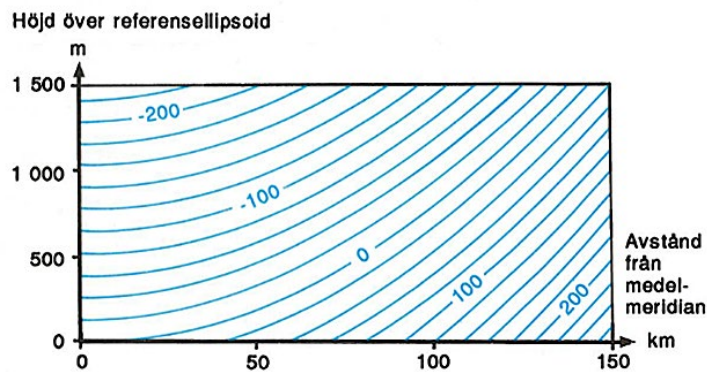
Korrekturen är alltid negativ och ändras linjärt med höjden över ellipsoiden. Den är t.ex. -20 ppm (mm/km) på höjden 128 meter.

- Projektionskorrekturen utförs för att anpassa avståndet till kartprojektionens variabla skala och beror på objektets avstånd från projektionens medelmeridian.

Korrekturen är alltid positiv och ändras kvadratisk med avståndet från medelmeridianen. Den är t.ex. +20 ppm på avståndet 4 mil.

I SWEREF 99 TM, som har en enda projektionszon för hela landet, blir deformationen nästan alltid ohanterlig för den här aktuella typen av tillämpningar. Om man däremot tillämpar SWEREF 99:s lokala projektionszoner så är den mindre än 50 ppm över i stort sett hela landet (i praktiken sällan större än 35 ppm).

Som redan framgått så tar de två effekterna delvis ut varandra eftersom den första förminskar och den andra förstörar. Totaleffekten redovisas i Figur 4.



Figur 4. Sammanlagd inverkan av höjdkorrektion och projektkorrektion, enhet ppm = mm/km. Detta under förutsättning att skalfaktorn utefter medelmeridianen = 1,0, vilket den är i SWEREF 99:s lokala projektningszoner.
 Källa: HMK-Stommätning 1993.

Exempel: Totaleffekten av höjd- och projektkorrektionen är noll för t.ex. följande värdekompositioner (jfr. Figur 4):

Höjd över ellipsoiden	Avstånd från medelmeridianen
128 m	40 km
200 m	50 km
500 m	80 km
800 m	100 km

OBS: Höjd- och projektkorrektioner inför en skalskillnad mellan beräknade koordinater och mätningarna. Det är t.o.m. så att skalan varierar och är olika i olika områden.

Motsättningarna uppkommer av att koordinaterna är beräknade i en specificerad kartprojektion vid havsnivån (på referensellipsoiden) medan mätningarna utförs i "verkligheten" och på aktuell höjd. Det rör sig alltså om en skillnad mellan modell och verklighet.

Även om dessa korrekteringer är nödvändiga för en entydig beräkning av ett stamnät så kan uppkomna skillnader ge problem i tillämpningar med höga kvalitetskrav, t.ex. vissa bygg- och anläggningsprojekt inom ramen för BIM: *Building Information Model(ling)*. I princip måste då en "avprojicering" till för att hantera dessa motsättningar i det praktiska mätarbetet. Detta återkommer vi till den tekniska rapport om *långsträckta objekt* som omnämns under rubriken "Tre-dimensionella nät" på sid. 53.

Kontroll av grova fel i fält

Det optimala är om eventuella grova fel kan elimineras redan i fält. Därför utförs dubbelmätningar – helst vid olika tillfällen, för att om möjligt få två helt oberoende mätningar att jämföra.

Toleranser för avvikelserna vid en sådan jämförelse ställs traditionellt upp med hjälp av mätningarnas standardosäkerhet på följande sätt:

$$T = 2\sqrt{2} \cdot u(l_i) = 2,8 \cdot u(l_i) \quad (4.3)$$

där T är toleransen och $u(l_i)$ standardosäkerheten för en mätning. 2:an är GUM:s approximation av normalfördelningens 1,96 och $\sqrt{2}$ härrör från att det är en skillnad mellan två mätningar.

Exempel kan vara dubbelmätning av längder ($u(l_i)$ = standardosäkerheten i **en** längdmätning) eller återbesök vid RTK-mätning ($u(l_i)$ = standardosäkerheten i **en** positionsbestämning). Om toleransen klaras beräknas *medeltalet* av de två mätningarna och det är detta värde som sedan används vidare.

Andra exempel är sats- och stationsmedeltal vid riktningsmätning samt medeltal av mätta höjdskillnader. I [HMK - Stommätning 1993](#) redovisas "tumregler" för spridningen mellan helsatser vid riktningsmätning, se Tabell 4.d.

Tabell 4.d. Tumregler nivå II (varningsgräns) för kontroll av riktningsmätning i plana stomnät. (Tabell A.1 i [HMK-Stommätning 1993](#).)

Alt.	Siktlängder	Antal objekt	Antal helsatser	Maximal spridning (mgon)
1	100-200m	2-3	2	1,5
2	500-1000m	3-4	4	2,0
3	2-5 km	4-6	6	2,5

Alternativen i tabellen kan associeras till polygontåg i bruksnät (1) och storpolygonnät (2) – se Kapitel 11 – samt triangelnät (3).

Det finns även vissa möjligheter att hitta grova fel i samband med beräkningen av nätet, se Kapitel 6.

Sammanfattande visdomsord

Balans bör råda mellan längd- och riktningsmätningen.

Höjd- och projektionskorrektioner krävs för att modellen vid stomnätsutjämnning ska bli entydig, men det kan skapa skalskillnader mellan beräkningsmodellen och den vardagliga mätningen.

Kontroll av grova fel bör helst ske redan i fält.



5 Beräkning av stornät

Utjämningsmodellen

Stornätsberäkning - utjämning - utförs genom lösning av ett ekvationssystem. Det utgår från ett antal kända *utgångspunkter* och baseras på sambandet mellan utförda mätningar (höjdskillnader, längder, riktningar, baslinjer etc.) och de sökta storheterna, t.ex. *ny-punkternas* koordinater och höjder. Systemet ska vara överbestämt, dvs. det krävs fler mätningar än sökta storheter.

Antalet *överbestämningar* eller *frihetsgrader* (f) beräknas som

$$f = n - m \quad (5.1)$$

där n är antalet mätningar och m antalet sökta storheter. Genom denna *redundans* kan den erhållna lägesosäkerheten i nätet skattas och det blir även möjligt att söka grova fel i mätmaterialet.

I utjämningsberäkningen tilldelas mätningarna "vikter" i förhållande till mätosäkerheten. Vikten P_i beräknas vanligen som

$$P_i = \frac{1}{u^2(l_i)} \quad (5.2)$$

där $u(l_i)$ är mätningens *standardosäkerhet*. (Vid t.ex. hantering av GNSS-baslinjer tas även hänsyn till *korrelationer* - beroenden - mellan baslinjerna, vilket blir litet mer komplicerat.)

Mätosäkerheten i kombination med att ekvationssystemet är överbestämt innebär att inte alla ekvationer kan uppfyllas exakt. Skillnaden benämns *förbättring* (v_i) och är den korrektion som görs av mätningarna för att dessa ska stämma överens med utjämningsresultatet. De beräknas som

$$v_i = \hat{l}_i - l_i \Leftrightarrow \hat{l}_i = l_i + v_i \quad (5.3)$$

där l_i är mätvärdet och \hat{l}_i är motsvarande värde beräknat i utjämnningen. Minsta-kvadratmetoden innebär minimering av "den viktade kvadratsumman av förbättringarna", dvs.

$$\sum_{i=1}^n v_i^2 P_i = v_1^2 P_1 + v_2^2 P_2 + \dots + v_n^2 P_n \text{ är minimum} \quad (5.4)$$

Det är förbättringarna som sedan används för att analysera utjämningsresultatet.

Test av mätosäkerheten

Den första indikationen på hur utjämnningen har gått ges av *vikt-enhetens standardosäkerhet*:

$$u_o = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2 P_i}{n-m}} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2 P_i}{f}} \quad (5.5)$$

som är en skattning av standardosäkerheten för en mätning med

vikten ett (1) och ger en uppfattning om den **faktiska** mätosäkerheten i förhållande till den **antagna** osäkerheten.

u_o -värden som är signifikant **större än** ett ($u_o \gg 1$) indikerar att mätosäkerheten är högre än vad som antagits eller att det finns – ett eller flera – grova fel i mätmaterial. Vad som är statistiskt signifikant anges av toleranserna i Tabell 5.

Tabell 5. Maximala och minimala värden för vikthenhetens standardosäkerhet (täckningsgrad 95 %) vid utjämnning av stomnät.

Antal överbestämningar (ö)	Maxvärde för vikthenhetens standardosäkerhet	Minvärde för vikthenhetens standardosäkerhet
1	1,96	0,51
2	1,73	0,58
3	1,61	0,62
4	1,54	0,65
5	1,49	0,67
7	1,42	0,71
10	1,35	0,74
15	1,29	0,77
20	1,25	0,79
30	1,21	0,82
50	1,16	0,86
70	1,14	0,88
100	1,11	0,89
200	1,08	0,93
500	1,05	0,96

En approximativ formel för denna tabell ges av uttrycket

$$\max \approx 0,96 + f^{-0,4}; \quad \min \approx 1/(0,96 + f^{-0,4}) \quad (5.6)$$

Signifikant avvikelser uppåt visar alltså antingen att viktsättningen är för optimistisk eller att det finns grova fel bland mätningarna. Om så är fallet bör felsökning inledas, förslagsvis genom "data-snooping" som beskrivs i nästa kapitel.

Men om u_o är avsevärt **mindre än** ett ($u_o \ll 1$), är det också ett problem? Egentligen inte vad avser beräkningen av de sökta storheterna, men felsökningen ges inte rätt förutsättningar om den verkliga mätosäkerheten är väsentligt lägre än den antagna. Data-snooping kommer t.ex. att släppa igenom fler grova mätfel.

Som första åtgärd rekommenderas då en uppdatering av mätosäkerheterna. Det sker genom att den antagna mätosäkerheten, före utjämnningen, multipliceras/reduceras med det skattade u_o -värdet enligt:

$$u_{\text{korrigerad}}(l_i) = u_o \cdot u_{\text{antagen}}(l_i) \quad (5.7)$$

varefter utjämnningen upprepas med mer korrekta förutsättningar.

Standardosäkerheter i de beräknade storheterna

Standardosäkerheterna i beräknade koordinater, höjder m.m. skattas som

$$u(x) = u_o \sqrt{Q_{xx}} \quad (5.8)$$

där x är den beräknade storheten och Q_{xx} hämtas från utjämnings *varians-kovariansmatris*. Denna matris avspeglar det aktuella nätets geometri och den antagna mätosäkerheten.

I det två-dimensionella fallet beräknas t.ex.

$$\text{standardosäkerheten i Northing: } u(N) \quad (5.9)$$

$$\text{standardosäkerheten i Easting: } u(E) \quad (5.10)$$

på detta sätt och ur dessa storheter skattas sedan

$$\text{standardosäkerheten i plan: } u(\text{plan}) = \sqrt{u^2(N) + u^2(E)} \quad (5.11.a)$$

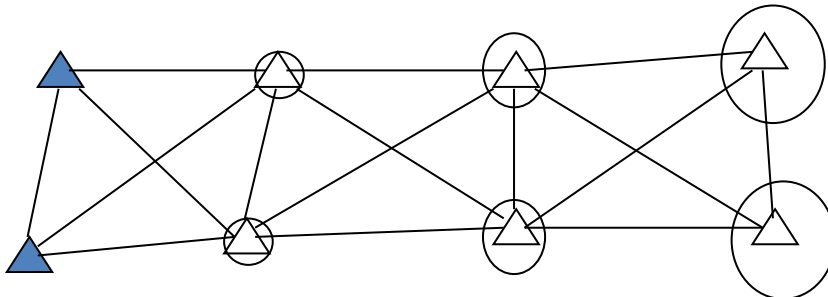
Det måttet beror i huvudsak på

- de utförda mätningarnas antagna mätosäkerhet
- nätgeometrin
- antalet mätningar i förhållande till antalet nypunkter.

Men det påverkas även av

- nypunkternas läge i förhållande till utgångspunkterna.

I Figur 5.a har standardosäkerheten i plan ritats ut med cirklar som motsvarar dess storlek. Det syns tydligt att osäkerheten ökar med avståndet från utgångspunkterna, som ligger till vänster i figuren.

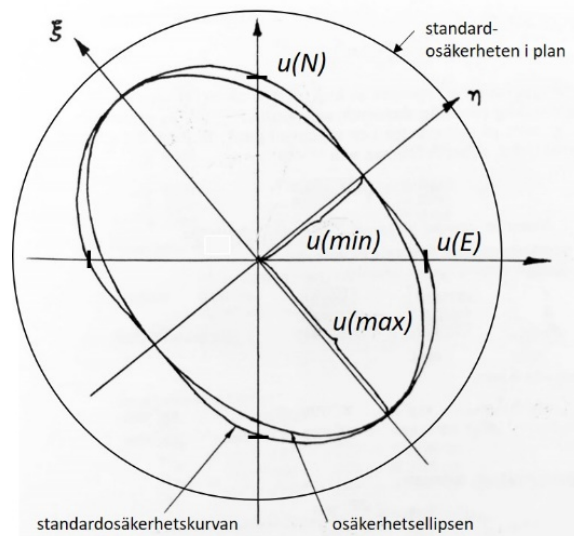


Figur 5.a. Schematisk skiss över hur standardosäkerheten i plan i nypunkterna beror på avståndet till de fasta utgångspunkterna.

Osäkerhetsellipser

Lägesosäkerheten i plan kan även redovisas med hjälp av *osäkerhetsellipser*. Den typen av grafisk redovisning kan snabbt visa på styrkor och svagheter i lägesbestämningarna, både geometriska och mätningstekniska sådana.

I Figur 5.b finns ett exempel på en osäkerhetsellips (Bjerhammar, 1958).



Figur 5.b. Sambandet mellan osäkerhetsellips, standardosäkerhetskurva och standardosäkerheten i plan.

Av figuren framgår att osäkerhetsellipsen är en approximation av *standardosäkerhetskurvan*, men approximationen är god så det går det att bortse från. Som synes är ellipsen också betydligt mindre än den cirkel som avser standardosäkerheten i plan. Osäkerhetsellipsen visar nämligen standardosäkerheten i olika riktningar, **en i taget**. Den är alltså en-dimensionell till sin karaktär medan standardosäkerheten i plan avser totaleffekten i Northing och Easting enligt Formel (5.11.a).

T.ex. är standardosäkerheten i Northing, $u(N)$, skärningen mellan kurvan/ellipsen och N -axeln medan standardosäkerheten i Easting, $u(E)$, kan avläsas i kurvans/ellipsens skärning med E -axeln. På motsvarande sätt visar ellipsens storaxel riktningen för den maximala standardosäkerheten, $u(max)$, och dess lillaxel visar riktningen för den minimala standardosäkerheten $u(min)$.

Ju mer tillplattad en osäkerhetsellips är, desto mer vittnar den om brister i geometrin eller en obalans mellan längd- och riktningsmätningen i den aktuella delen av nätet. En ideal osäkerhetsellips går mot cirkelform, men oavsett form så representerar arean hos denna ellips en täckningsgrad på endast 39,3 %. För att bli ett två-dimensionellt mått, och kunna jämföras med cirkeln för standardosäkerheten i plan, måste ellipsens axlar multipliceras med $\sqrt{2}$.

Och för att åstadkomma konfidensnivån 95 % måste både ellipsen och standardosäkerhetscirkeln dessutom multipliceras med faktorn 1,73. Det är täckningsfaktorn för 95% i den två-dimensionella normalfördelningen, vilket motsvarar den en-dimensionella fördelningens 95%-värde 1,96.

Tolkning av osäkerhetsellipser och standardosäkerheten i plan

Det går att visa att (jfr. Formel 5.11.a)

$$u(plan) = \sqrt{u^2(N) + u^2(E)} = \sqrt{u^2(max) + u^2(min)} \quad (5.11.b)$$

dvs. detta mått är rotationssymmetriskt och därför oberoende av koordinatsystemets orientering. Men det innebär samtidigt att även osäkerhetsellipserna är beroende av avståndet till de kända utgångspunkterna.

OBS: En stor eller oval osäkerhetsellips beror INTE på felanhopningar i anslutning till den aktuella punkten, dvs fel i de **faktiskt** utförda mätningarna. Det gör inte heller stora standardosäkerheter i plan. Dessa mått är endast beroende av den **antagna** mätosäkerheten och nätgeometrin. De går därför att beräkna i förväg, t.ex. vid simulering av stamnät (Kapitel 9).

Men om nu de traditionella måtten inte ger tillräcklig information om denna lägesosäkerhet, vad gör vi då? Finns det bättre metoder?

Ja, det går att använda *relativa* osäkerhetsmått i stället, t.ex. *standardosäkerheten i beräknade avstånd*. Detta behandlas i samband med "data-snooping, kontrollerbarhet och tillförlitlighet", som är rubriken på nästa kapitel, Kapitel 6. Och i Kapitel 7 introduceras ytterligare ett alternativmått.

Sammanfattande visdomsord

Utjämnning enligt minsta-kvadratmetoden är en underbar skapelse, men tolkningen av resultatet kräver fingertoppskänsla.

Standardosäkerheten i plan och osäkerhetsellipser redovisar t.ex. INTE felanhopningar i de mätningar som faktiskt har utförts. De är endast grova mått baserade på stamnätgeometrin, den **antagna** mätosäkerheten och utgångspunkternas placering.

Relativa osäkerhetsmått ger ofta mer användbar information om lägesosäkerheten.



6 Data-snooping, kontrollerbarhet och tillförlitlighet

Kontrollerbarhet

Kontrollerbarhet är ett grovt mått på möjligheterna att hitta grova mätfel efter utjämning. Det s.k. *k-talet* (*kontrollerbarhetstalet*) definieras som

$$k = \frac{n-m}{n} = \frac{f}{n} \quad (6.1)$$

dvs. antalet överbestämningar i förhållande till antalet mätningar. Detta tal ligger mellan noll och ett (0 - 1) och är ett mått på den genomsnittliga kontrollerbarheten i nätet. Ett litet *k*-värde innebär att det är svårt att hitta grova fel och $k = 0,5$ kan sägas vara gränsen mellan bra och dålig kontrollerbarhet. Det ger "en överbestämning per obekant", vilket är en gammal tumregel.

Kontrollerbarhetstalet för ett plant stornät mätt med terrester teknik beräknas med följande formel:

$$k = \frac{f}{n} = \frac{l+r-z-2p}{l+r} \quad (6.2)$$

där l är antalet mätta längder, r är antalet mätta riktningar (totalt i alla riktningsserier), z är antalet orienteringsvinklar (en för varje riktningsserie) och p är antalet nypunkter (två koordinater/punkt).

OBS: I beräkningen av *k*-tal ska inte upprepade mätningar tas med. Vid helsatsmätning av riktningar och dubbelmätning av längder är det **medeltalen** och inte de **enskilda mätningarna** som ska gå vidare till utjämningen. Och det är antalet sådana medeltal som ska ligga till grund för beräkningen av *k*-talet.

I fält används upprepade mätningar för att minska mätosäkerheten och för att detektera grova fel på ett tidigt stadium. *k*-talet är ett mått på hur **olika**, närliggande mätningar i ett nät "hjälp varandra", t.ex. vid grovfelssökning.

Att ta med de individuella mätningarna i *k*-talsberäkningen förfelar hela tanken med kontrollerbarhet. Det kan t.ex. få som konsekvens att *k*-talet ligger nära ett (1) trots att enskilda mätningar är helt okontrollerade och vissa punkter kanske t.o.m. ofullständigt bestämda.

Kontrollerbarheten i en enskild mätning (k_i) kan också beräknas, och totalt sett bör kontrollerbarheten vara så jämnt fördelad som möjligt inom ett nät. Dvs. såväl de enskilda k_i -värdena som genomsnittet (*k*-talet) bör vara $\geq 0,5$.

Mellan en mätnings förbättring och det bakomliggande mätfelet (e_i) råder följande ungefärliga samband (e_i och v_i har definitionsmässigt olika tecken):

$$e_i \approx -\frac{v_i}{k_i} \quad \Leftrightarrow \quad v_i \approx -k_i e_i \quad (6.3a)$$

Formeln gäller framför allt för **grova** mätfel. Observera att skattningen av e_i med denna formel inte är en statistisk skattning – med en inbyggd osäkerhet – utan det entydiga resultatet av en rent algebraisk operation. e_i är helt enkelt den motsägelse som skulle uppstå om motsvarande mätning hade uteslutits ur utjämnningen och denna storhet i stället hade beräknats med hjälp av övriga mätningar.

Förbättringen v_i brukar benämnas "den synliga delen" av ett mätfel. Om t.ex. $k_i = 0,5$ ger Formel (6.3.a) att bara hälften ($0,5 = 50\%$) av ett grovt mätfel kommer att "synas" i motsvarande förbättring. Resten

$$e_i - (-v_i) = e_i + v_i = (1 - k_i)e_i \quad (6.3b)$$

är "den osynliga delen", som kommer att "slukas upp" av utjämnningen och påverka beräkningen av koordinater/höjder menligt.

Förbättringarna som sådana är därför inget bra verktyg för att hitta grova fel, åtminstone inte vid små k -tal.

Sökning av grova fel: data-snooping

Den holländske geodeten Baarda (1968) utformade därför ett formellt statistiskt test för sökning av grova mätfel som har fått benämningen *data-snooping*.

Där jämförs varje förbättring med sin egen standardosäkerhet

$$u(v_i) = u(l_i)\sqrt{k_i} \quad (6.4)$$

och mätningar för vilka storheten (den *standardiserade förbättringen*)

$$|w_i| = \frac{|v_i|}{u(v_i)} = \frac{|v_i|}{u(l_i)\sqrt{k_i}} > 1,96 \approx 2 \quad (6.5)$$

flaggas för misstänkt grovt fel. Symbolen $||$ anger *absolutbeloppet*, för att undvika negativa värden.

Användandet av data-snooping bör ske i en iterativ process där högst en mätning tas bort i varje iteration: den som har högst testkvot. Därefter upprepas beräkningen av stomnätet och processen avbryts när ingen mätning överskrider testkvoten.

"På den tiden det begav sig" (1970-talet) fanns det flera olika skolor för hur denna process skulle utformas.

- Enligt den "danska metoden" togs inga mätningar bort rent fysiskt. I stället viktades de ned kraftigt genom att mätningen gavs en hög standardosäkerhet (kanske 1 meter eller

så för längder), så att det fortfarande gick att studera avvikelsen gentemot övriga mätningar via dess förbättring.

- Ett annat förfarande var att, när processen var avslutad, lägga tillbaka de uteslutna mätningarna igen, en efter en. Man började då med den som uteslöts först. Tanken var att det kanske inte var den mätningen det var fel på utan orsaken till dess höga testkvot kan ha varit att några andra mätningar i dess närhet var felaktiga.
- Det gjordes också försök att utforma metoder med simultana testkvoter för flera mätningar tillsammans. De blev emellertid tämligen komplicerade och ganska opraktiska.

Man får nog helt enkelt konstatera att data-snooping i ett mätmaterial som innehåller flera grova fel är problematisk och kräver erfarenhet. Men om de grova felen inte är så många och/eller om de ligger i olika delar av ett nät så fungerar metoden ganska bra – åtminstone om k -talet är rimligt.

Ett sätt att angripa data-snooping är att inledningsvis tillämpa "blind rejection", dvs. att successivt ta bort alla mätningar som överskrider testkvoten = 2 i en iterativ process utan att fundera på orsaken till överskridandet. I princip bör alltså bara en mätning uteslutas i varje iteration. Men mätningar i helt olika delar av nätet – som inte kan påverka varandra – kan uteslutas samtidigt, dvs. i samma iteration.

Efter den proceduren finns vanligen en bruttouppsättning av misstänkta mätningar som får studeras närmare. Hur många sådana det finns utgör ett mått på hur allvarligt problemet är. Antalet felflaggade mätningar (testkvot > 2) bör inte överskrida 5% av det totala antalet eftersom 2:an definierar normalfördelningens 95%-nivå.

Om beräkningsprogrammet så tillåter bör uteslutna mätningar inte tas bort fysiskt utan viktas ned. På så sätt går det att se hur stor avvikelsen är, och kanske enklare förstå dess orsak.

Inre och yttre tillförlitlighet

Ett stomnäts *tillförlitlighet* är ett striktare mått än kontrollerbarhet på nätets känslighet för grova mätfel. Stomnät i vilka man, med hjälp av data-snooping, kan hitta även ganska små grova fel sägs ha en stor *inre tillförlitlighet*. Om dessutom de grova fel som **inte** upptäcks bara påverkar utjämningsresultatet i begränsad omfattning så sägs nätet även ha en stor *yttre tillförlitlighet*.

Värdena har statistisk bakgrund och ges som regel i samma enheter som mätningarna själva eller som multiplar av motsvarande standardosäkerheter.

Den inre tillförlitligheten mäts med hjälp av gränsvärdena för *Minsta Upptäckbara Fel*

$$MUF = \frac{\delta_o}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i) \quad (6.6)$$

dvs. $\frac{\delta_o}{\sqrt{k_i}}$ gånger motsvarande mätningens standardosäkerhet. *MUF* anger alltså det minsta grova fel som kan detekteras m.h.a. data-snooping. Den statistiska storheten δ_o återkommer vi strax till.

Den yttre tillförlitligheten (*YT*) anger hur mycket *MUF* påverkar resultatet och kan uppskattas med sambandet, jfr. Formel (6.3.b):

$$YT = (1 - k_i) \cdot MUF = \frac{\delta_o(1-k_i)}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i) \quad (6.7.a)$$

dvs. $\frac{\delta_o(1-k_i)}{\sqrt{k_i}}$ gånger mätningens standardosäkerhet.

Ofta relateras *YT* i stället till den **utjämnade** mätningens standardosäkerhet, vilken är

$$u(l_i + v_i) = u(l_i)\sqrt{1 - k_i} \quad (6.8)$$

Det ger den alternativa *YT*-definitionen

$$YT = \frac{\delta_o(1-k_i)}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i) = \frac{\delta_o\sqrt{1-k_i}}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i)\sqrt{1 - k_i} \quad (6.7.b)$$

dvs. $\frac{\delta_o\sqrt{1-k_i}}{\sqrt{k_i}}$ gånger den utjämnade mätningens standardosäkerhet.

Beräkning av storheten δ_o

Storheten δ_o bestäms utifrån vissa sannolikhetsmässiga antaganden. Dess storlek beror därför på dessa antaganden och δ_o är alltså inte en allmängiltig "sanning".

I HMK beräknas den som

$$\delta_o = \delta_\alpha + \delta_\beta = 1,96 + 0,84 = 2,80 \quad (6.9)$$

där

δ_α = normalfördelningens 95%-värde, vilket innebär att det är 5% risk att överskridandet av data-snoopingens gränsvärde för standardiserade förbättringar är en helt normal variation inom normalfördelningen, och alltså **inte** ett grovt fel (*beslutsfel av första slaget*).

δ_β = normalfördelningens 80%-värde, vilket innebär att risken är 20% att ett grovt fel **inte** syns i data-snoopingens gränsvärde för standardiserade förbättringar, utan "maske-ras" av den naturliga variationen i övriga mätningar (*beslutsfel av andra slaget*).

Ett litet δ_α -värde ger goda möjligheter att hitta grova fel men innebär stor risk för onödig ommätning. Ett stort δ_α -värde ger få ommätningar men ökar risken för att grova fel förblir oupptäckta. $\delta_\alpha = 1,96 (\approx 2)$ kan ses som en bra kompromiss.

Ett räkneexempel

Exempel: Eftersom $k \geq 0,5$ brukar anges som riktvärde – både för ett näts övergripande k -tal och de individuella k_i -värdena – kan det vara intressant att beräkna vilka värden det ger på MUF och YT .

Formel (6.6) ger

$$MUF = \frac{\delta_o}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i) = \frac{2,8}{\sqrt{0,5}} \cdot u(l_i) = 4 \cdot u(l_i)$$

dvs. 4 ggr mätningens (ursprungliga) standardosäkerhet.

Formel (6.7.a) ger

$$YT = 2,8 \frac{(1 - k_i)}{\sqrt{k_i}} \cdot u(l_i) = (1 - k)MUF = 0,5 \cdot 4 \cdot u(l_i) = 2 \cdot u(l_i)$$

dvs. 2 gånger mätningens ursprungliga standardosäkerhet – resten "syns" i motsvarande förbättring. Formel (6.7.b) ger alternativvärdet

$$YT = 2,8 \sqrt{\frac{1 - k_i}{k_i}} \cdot u(l_i) \sqrt{1 - k_i} = 2,8 \sqrt{\frac{1 - 0,5}{0,5}} \cdot u(l_i + v_i) = 2,8 \cdot u(l_i + v_i)$$

dvs. 2,8 ggr den **utjämnade** mätningens standardosäkerhet enligt Formel (6.8).

Sammantaget kommer vi att hitta fel som är större än 4 ggr mätningens standardosäkerhet, och de fel vi inte hittar ger som mest en påverkan på utjämnningen med halva detta belopp.

Ett alternativt mått på lägesosäkerheten i plan

I slutet av Kaptitel 5 utlovade vi alternativa mått på lägesosäkerheten, eftersom osäkerhetsellipser och standardosäkerheten i plan kan vara problematiska att tolka.

En lösning ligger i att gå över till *relativa osäkerhetsmått*. De är inte lika beroende på placeringen av, och avstånden till, de fasta utgångspunkterna i utjämningsberäkningen. De är därför särskilt användbara som mått på den *lokala lägesosäkerheten* i nätet, dvs. osäkerheten i förhållande till **närliggande** stompunkter.

Visst har den *absoluta lägesosäkerheten* blivit allt viktigare i en tid då vi har ett gemensamt nationellt referenssystem (SWEREF 99) och kan mäta med nätverks-RTK mot fasta referensstationer som ligger flera mil bort. Men det finns fortfarande många tillämpningar där den lokala lägesosäkerheten är viktigast.

Vi utgår här från standardosäkerheten för det **utjämnade** värdet på ett avstånd enligt Formel (6.8):

$$u(l_i + v_i) = u(l_i) \sqrt{1 - k_i} \quad (6.8 *)$$

där l_i är motsvarande **mätta** avstånd, v_i är den förbättring till mätningen som har beräknats i utjämnningen, $u(l_i)$ är mätningens standardosäkerhet och k_i är mätningens individuella k -tal.

Detta mått har redan använts för att uttrycka den yttre tillförlitligheten. Men det kan även användas för att konstruera ett alternativt mått på lägesosäkerheten i 2D.

Man kan visa (Persson, 2016) att följande samband gäller mellan standardosäkerheten för ett två-dimensionellt avstånd och standardosäkerheten i plan för vardera ändpunkten (som antas vara lika):

$$u(\text{avstånd-2D}) = u(\text{ändpunkt}) \quad (6.10)$$

Om vi vänder på detta uttryck får vi följande definition av ett nytt mått på den **lokala** lägesosäkerheten i plan:

$$u_{\text{lokal}}(\text{punkt}) := u(l_i) \cdot \sqrt{1 - k_i} \quad (6.11)$$

som direkt kan beräknas om vi känner mätosäkerheten och k -talet.

Detta mått är helt oberoende av fasta punkters placering. Det är främst avsett för överslagsberäkningar, baserade på standardosäkerheten för nätets genomsnittliga punktavstånd och nätets övergripande k -tal enligt Formel (6.1).

Exempel: Om vi sätter in $k = 0,5$ (toleransen för k -tal i triangelnät) får vi följande skattning av den genomsnittliga, lokala lägesosäkerheten i plan för nätets nypunkter:

$$u_{\text{lokal}}(\widehat{\text{punkt}}) \approx u(\bar{l}_i) \cdot \sqrt{1 - 0,5} = 0,71 \cdot u(\bar{l}_i)$$

där $u(\bar{l}_i)$ är standardosäkerheten för det genomsnittliga avståndet mellan punkterna.

Skattningar enligt Formel (6.11) kan beräknas för fri och fast utjämnning (Kapitel 8) men även i samband med simulering (Kapitel 9). Vid fri utjämnning är en sådan skattning det enda mått som ger två-dimensionell information om den lokala lägesosäkerheten, eftersom ett fritt näts placering och orientering är helt godtycklig.

Jag vågar påstå att detta mått ligger mycket nära den intuitiva uppfattningen om vad "lägesosäkerhet" är, åtminstone den lokala lägesosäkerheten. Ytterligare ett sådant mått definieras i samband med koordinattransformation i Kapitel 7.

OBS: Om nätet bara består av en nypunkt, med direkta sikter till omgivande utgångspunkter, är dock standardosäkerheten i plan och osäkerhetsellipser bra mått på nypunktens lägesosäkerheten i plan – i förhållande till dessa utgångspunkter. Så är fallet vid t.ex. tillämpning av fri station och mätning med nätverks-RTK mot fasta referensstationer.

Sammanfattande visdomsord

Det optimala är att grova fel kan upptäckas redan i fält. Vissa möjligheter till grovfelsökning med data-snooping finns dock även i samband med utjämnings – om nätet är homogent, kontrollerbarheten tillräcklig och balans råder mellan osäkerheten i längd- och riktningsmätningen.

Ett sådant nät har en hög tillförlitlighet.



7 Koordinattransformation som analysverktyg

Inpassning är en metod för att bestämma ett *empiriskt* samband mellan två referenssystem. Syftet är vanligen att kunna göra *koordinattransformationer* från ett *från-system* till ett *till-system* (ibland även omvänt). Men metoden kan även användas för stommätanalys och i detta avsnitt ges en beskrivning av inpassning och transformation som verktyg för att kontrollera skalan och utgångspunkternas lägesosäkerhet i plana referenssystem.

Två olika två-dimensionella transformationsmodeller används – var för sig och tillsammans:

- *Helmert-transformation*, som består av vridning, skalförändring och translation i Northing och Easting (4 parametrar).
- *Unitär transformation*, med vridning, samma två translationer men med oförändrad skala (3 parametrar).

Inpassningen görs med hjälp av punkter som är bestämda i båda systemen, s.k. *passpunkter*.

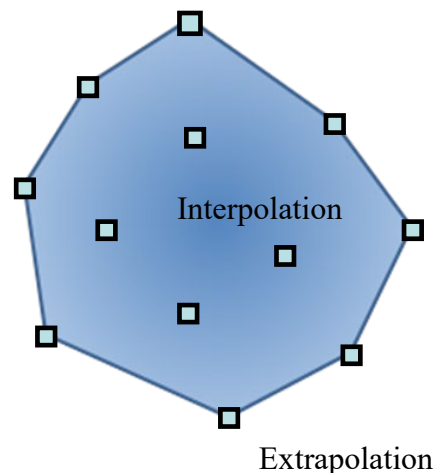
Hur många gemensamma punkter krävs?

Varje passpunkt ger upphov till två ekvationer i ett överbestämt ekvationssystem som utjämnas med minsta-kvadratmetoden. Som vanligt bör principen "en överbestämning/frihetsgrad per obekant" tillämpas, dvs. $k \geq 0,5$. Det förutsätter att det finns åtminstone fyra gemensamma punkter.

Helmert-transformationen ger då 4 frihetsgrader ($4 \cdot 2 = 8$ ekvationer minus 4 obekanta) och den unitära transformationen 5 frihetsgrader (8 ekvationer minus 3 obekanta). Detta är ett absolut minimum.

Fler passpunkter rekommenderas, bl.a. som beredskap för att någon av punkterna är felaktig och behöver strykas.

För att undvika *extrapolation* ska dessutom passpunkterna vara tillräckligt många för att kunna täcka och omsluta det aktuella området, se Figur 7.



Figur 7. *Interpolation vs. extrapolation vid koordinattransformation (och stommätning i allmänhet).*

Olika typer av analyser

De två transformationsmodellerna kan användas på flera olika sätt, framför allt för att

- bestämma skalskillnader mellan system
- hitta grova fel i passpunkter
- skatta systemens lägesosäkerhet.

I den fortsatta framställningen kommer vi att använda Lantmäteriets programsystem *GTRANS* som analysverktyg och för illustration. *GTRANS* är ett generellt programsystem för alla typer av inpassningar, transformationer och överäkningar mellan referenssystem. Det är att betrakta som state-of-the-art inom sitt tillämpningsområde och innehåller även en modul för grafisk redovisning i kartform.

Om det finns någon brist så skulle det väl vara att *GTRANS* har många år på nacken och att terminologin därför skiljer sig något från den som tillämpas i HMK i dag. Vissa översättningar görs därför i nedanstående beskrivningar.

Analysprocessen

Följande generella analysflöde rekommenderas:

1. Genomför en inpassning med Helmert-transformation mellan de två systemen.
2. Studera särskilt
 - a. eventuell skalfaktor ($\neq 1$) och dess signifikans
 - b. om systemet har flaggat några misstänkta grova passpunktsfel
 - c. storleken på viktenhetens standardosäkerhet.
3. Genomför motsvarande inpassning med en Unitär transformation (kan göras med några få knapptryckningar i *GTRANS*!).
4. Studera särskilt
 - a. om systemet har flaggat några misstänkta grova passpunktsfel och om de berörda punkterna i så fall är desamma som i Helmert-transformationen
 - b. eventuell skillnad mellan de olika skattningarna av viktenhetens standardosäkerhet.
5. Om grova passpunktsfel misstänks, dvs. är flaggade: ta bort den punkt som verkar mest problematisk (en punkt i taget) och upprepa 1-4 tills alla felflaggningar är eliminerade.
6. Dokumentera slutsatserna och vidtag åtgärder beroende på syftet med analysen.

Skalskillnader och deras signifikans

Hur stor ska då skalskillnaden vara för att betraktas som (statistiskt) signifikant? Med GTRANS är det enkelt eftersom programmet beräknar både skalfaktorn (i Helmert-inpassningen) och skalfaktorns standardosäkerhet.

Om

$$|1 - s| \geq t \cdot u(s) \quad (7.1)$$

där s är skalfaktorn och $u(s)$ dess standardosäkerhet, så är avvikelserna från ett (1) statistiskt säkerställt. Tröskelvärdet t i Tabell 7.a är direkt hämtat från t-fördelningen.

Finns inte tillgång till $u(s)$ så finns ett alternativt tillvägagångssätt: att jämföra viktenhetens standardosäkerhet mellan Unitär transformation och Helmert-transformation.

Om

$$u_o(\text{Helmert}) < T \cdot u_o(\text{Unitär}) \quad (7.2)$$

där tröskelvärdet T också hämtas från Tabell 7.a, så är skalfaktorn signifikant. (Viktenhetens standardosäkerhet $u_o(\text{Unitär})$ är alltid **något** större än $u_o(\text{Helmert})$ eftersom fler parametrar har skattats i den senare inpassningen.)

Tabell 7.a. Tröskelvärden för analys av skalfaktorer vid inpassning (täckningsgrad 95 %).

Antal passpunkter	Frihetsgrader, Unitär	Frihetsgrader, Helmert	Tröskelvärde t	Tröskelvärde T
4	5	4	2,78	0,65
5	7	6	2,45	0,76
6	9	8	2,31	0,82
7	11	10	2,23	0,86
8	13	12	2,18	0,88
9	15	14	2,15	0,90
10	17	16	2,12	0,91
15	27	26	2,06	0,945
25	47	46	2,01	0,970
52	101	100	1,98	0,986

Hur en signifikant skalfaktor ska hanteras vidare beror på den aktuella problemställningen. Ibland är kunskapen om dess existens tillräcklig; den kan t.ex. förklara motsägelser som har uppdragats tidigare, på annat sätt, inom det aktuella området. Den andra ytterligheten är att skalskillnaden måste hanteras i det vardagliga mätandet.

Skalfaktorernas betydelse vid beräkning och analys av stomnät, i samband med deras etablering, återkommer vi till i nästa kapitel.

Uteslutning av passpunkter

Flaggning av passpunkter för misstänkt grovt fel görs i GTRANS med två-dimensionell data-snooping, där **en punkt** (med sina **två koordinater**) pekas ut i stället för **en mätning** som vid vanlig data-snooping. I övrigt är förfarandena relativt likartade och den två-dimensionella data-snooping är effektivare än att bara analysera förbättringarna, eftersom dess testkvot även tar hänsyn till att kontrollerbarheten varierar över transformationsområdet.

Men hur många punkter går det att utesluta innan inpassningsberäkningen kollapsar? I Tabell 7.b ges några tumregler för det. Om analysen pekar ut fler punkter än tabellen anger så är problemen allvarliga och kräver extra-ordinära åtgärder. Vi påminner om att endast en punkt bör uteslutas i varje iterationssteg.

Tabell 7.b. Tumregler för hur många punkter som maximalt bör uteslutas ur en inpassningsberäkning via två-dimensionell data-snooping. Särskilt viktigt är det att inte ta bort flera punkter som ligger nära varandra, utan att noga ta reda på den bakomliggande orsaken till "felanhopningen". Principen om **interpolation** enligt Figur 7 måste också upprätthållas.

Antalet ursprungliga passpunkter	Högsta antal uteslutna passpunkter
4	0
5	1
7	1
10	1-2
13	2
18	3
24	4
30	5
37	6
52	8
70	10
90	12

Tabellen kan även användas vid 3D-inpassning men antalet passpunkter bör då aldrig vara mindre än sex. Med ursprungligen 7 punkter finns alltså utrymme att utesluta en, och därefter kan Tabell 7.b användas ograverad.

Tolkning av viktenhetens standardosäkerhet

Vad betyder då viktenhetens standardosäkerhet från inpassningsberäkningen? Vi har redan sett att en orsak till variationen mellan Unitär transformation och Helmert-transformation kan vara att det finns en skalskillnad mellan referenssystemen. Så frågan är vad som blir kvar om den skillnaden är eliminerad genom att en skalfaktor har beräknats.

I varje transformationsekvation ingår **en** av koordinaterna, Northing eller Easting, och viktenhetens standardosäkerhet är därför primärt ett mått på *koordinatosäkerheten*. Därför borde denna standardosäkerhet multipliceras med $\sqrt{2}$ för att bli ett mått på *lägesosäkerheten* i 2D.

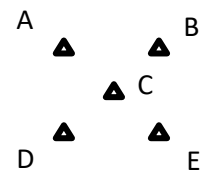
Men bidraget till ekvationernas förbättringar kommer från både till- och från-systemet, vilket i stället motiverar en division med $\sqrt{2}$. Dessa operationer tar därför ut varandra, vilket leder till följande generella slutsats:

- Om till- och från-systemets lägesosäkerhet antas vara likvärdiga så är viktenhetens standardosäkerhet vid inpassningsberäkning ett mått på passpunkternas lokala lägesosäkerhet i plan (2D) i de båda systemen.

Om det finns kvalitetskillnader mellan till- och frånsystemen så är viktenhetens standardosäkerhet ett mått på den **genomsnittliga** lägesosäkerheten i de två systemen – information som kan användas för rimlighetskontroll och som värdeomätare.

Exempel

Kapitlet illustreras – och avslutas – med en kommenterad inpassningsberäkning av vidstående nät med hjälp av GTRANS. (De numrerade rutorna motsvarar efterföljande kommentarer.)



```

RESULTAT AV INPASSNING I PLAN (HELMERT)

  Antal gemensamma punkter =          5
  Antal använda passpunkter   Np      =          5
  Antal obekanta parametrar   Nc      =          4
  Antal överbestämningar     Nf      =          6
  Kontrollbarhetstal         K-tal    =          1  .60
  Grundmedelfel              So      =          .0126

  Vridning   GON =          .000552  S(vridning) =          .000567
  Skala      =          1.000023775  S(skala)   =          .000008905
  Vridning   MGON =          .55 =          .97 * S(vridning)
  Skala      PPM =          23.8 =          2.67 * S(skala)

Formelsamband (HELMERT) :
  xt = x0 + a * xf - b * yf - vx
  yt = y0 + b * xf + a * yf - vy

  x0 =          -.0000600   y0 =          .0000000
  a  =          1.00002377457660   b  =          .00000867496979

INDATA
Pnr          xf          yf          xt          yt
A           499.9962       -499.9968       500.0263       -500.0115
B           500.0085         500.0032       500.0130         500.0171
C            -.0015         .0041           -.0078           -.0072
D          -500.0017       -500.0170       -500.0050       -500.0126 >F
E          -500.0013         500.0067       -500.0266         500.0144

RESTFEL          HELMERT
                  Datasnooping (plan).
                  Test av T > F(2,2*Np - 4 - 2) 5% =          6.94
                  Antal punkter där Testkvot > F =          1
                  Flagga i högra kanten: V= ej passpunkt, > F= stort T

Pnr          vx          vy          ex          ey          T
A           -.0139          .0072       -.0253          .0130         1.76
B            .0030          .0023          .0054          .0042          .06
C            .0062          .0113          .0078          .0141          .56
D           -.0043       -.0206       -.0078       -.0375         11.19 >F
E            .0090       -.0002          .0164       -.0003          .37
  
```

1. Helmert-transformation med 5 passpunkter ger 6 frihetsgrader (överbestämningar). Viktenhetens standardosäkerhet (grundmedelfelet) blir 0,0126 m och $k = 0,6$.
2. Skalfaktorn bestäms till +23,8 ppm vilket är signifikant på 95%-nivån. Det är 2,67 gånger skalfaktorns standardosäkerhet $s(\text{skala})$, vilket är större än t -värdet 2,45 för 5 passpunkter enligt Tabell 7.a.
3. Punkt D flaggas för grovt fel eftersom högsta tillåtna ...
4. ... testkvot är 6,94 (vid två-dimensionell data-snooping) ...
5. ... och punkt D har kvoten 11,19.
6. v_x och v_y är residualerna (förbättringarna) medan ...
7. e_x och e_y är de motsägelser som erhålls om den aktuella punkten utesluts ur inpassningen. Skillnaden mellan v_x/v_y och e_x/e_y är större i utkanten av området, dvs. kontrollerbarheten är störst i områdets centrala del.

```

RESULTAT AV INPASSNING I PLAN (UNITÄR)
  Antal gemensamma punkter =      5
  Antal använda passpunkter      Np      =      5
  Antal obekanta parametrar      Nc      =      3
  Antal överbestämningar         Nf      =      7
  Kontrollerbarhetstal           K-tal   =      .70
  Grundmedelfel                  So      =      .0172

  Vridning  GON =      .000552  S(vridning) =      .000776
  Vridning  MGON =      .55 =      .71 * S(vridning)

  Formelsamband (UNITÄR) :
  xt = x0 + a * xf - b * yf -
  yt = y0 + b * xf + a * yf - vy

  a^2 + b^2 = 1

  x0 =      -.0000600  y0 =      .0000000
  a  =      .9999999996237  b  =      .00000867475855

INDATA
Pnr      xf      yf      xt      yt
A      499.9962      -499.9968      500.0263      -500.0115
B      500.0085      500.0032      500.0130      500.0171
C      -.0015      .0041      -.0078      -.0072
D      -500.0017      -500.0170      -500.0050      -500.0126
E      -500.0013      500.0067      -500.0266      500.0144

RESTFEL      UNITÄR
  Datasnooping (plan).
  Test av T > F(2,2*Np - 3 - 2 ) 5% =      5.79
  Antal punkter där Testkvot > F =      0
  Flagga i högra kanten: V= ej passpunkt, > F= stort T

Pnr      vx      vy      ex      ey      T
A      -.0258      .0190      -.0342      .0219      4.15
B      -.0089      -.0096      -.0109      -.0121      .29
C      .0062      .0113      .0078      .0141      .28
D      .0076      -.0087      .0141      -.0156      .33
E      .0209      -.0120      .0286      -.0125      1.41

```

1. Unitär transformationen med 5 passpunkter ger 7 frihetsgrader (överbestämningar) och $k = 0,7$. Viktenhetens standardosäkerhet (grundmedelfelet) har ökat till 0,0172 m.
2. Ingen skalfaktor bestäms
3. utan den är låst till ett (1).
4. Högsta tillåtna testkvot har sjunkit till 5,79 eftersom antalet frihetsgrader har ökat men.....
5. ingen punkt flaggas för grovt fel. Eftersom det inte finns någon skalfaktor ökar bruset och felet i punkt D "maskeras".
6. Brusökningen yttrar sig i att residualerna (förbättringarna) v_x och v_y , liksom e_x och e_y , oftast är större än för Helmert-transformation – särskilt i ytterområdena. Även här är alltså kontrollerbarheten störst i mitten.

Skalfaktorn visar sig alltså vara signifikant redan i Helmert-transformationen (Formel 7.1). Slutsatsen blir densamma om man jämför viktenheternas standardosäkerheter och tillämpar Formel 7.2:

$$0,0126/0,0172 = 0,73 < 0,76 (= T \text{ för } 5 \text{ passpunkter i Tabell 7.a})$$

Den rimliga slutsatsen i exemplet är alltså att ta bort punkt D ur inpassningsberäkningen samt att påföra en skalfaktor. Det definitiva värdet på skalskillnaden beräknas i nästa iteration, när punkt D är borttagen. Den första Helmert-inpassningen gav skattningen 23,8 ppm. Det är för mycket för att ignoreras, eftersom standardosäkerheten i dagens EDM-instrument är ca. 1/10 av detta ppm-värde.

Enligt analysen ovan (överst på sidan 34) kan viktenhetens standardosäkerhet från inpassningen även användas som ett mått på passpunkternas lägesosäkerhet i plan (2D). Där ger Helmert-inpassningen ett värde på 12,6 mm, men då är alltså punkt D flaggad för grovt fel. Bedömningen blir därför att passpunkternas (lokala) standardosäkerhet i plan – i genomsnitt i de två systemen – ligger runt 1 cm.

Det är som synes ganska många slutsatser som kan dras ur en enkel inpassningsberäkning.

Sammanfattande visdomsord

En kombination av unitär transformation och Helmert-transformation kan användas för analys av sambandet mellan två plana koordinatsystem. Det gäller särskilt grova punktfel och olikheter i skala men till viss del även lägesosäkerheten. Det transformationsprogram som används bör kunna hantera två-dimensionell data-snooping.



8 Fri och fast nätutjämning

Beräkningsprocessen

Utjämning av ett triangelnät bör alltid genomföras stegvis, för att i de olika stegen kunna eliminera grova mätfel och felaktiga utgångspunkter samt reducera eventuella skalskillnader. Viktiga verktyg i denna process är fri och fast utjämning – samt koordinattransformation genom inpassning enligt föregående kapitel (Kapitel 7).

Fast utjämning

Den typ av utjämning som vi har behandlat i Kapitel 5 benämns *fast utjämning*. I en sådan ingår alla de utgångspunkter som det nya stomnätet ska anslutas till som **fasta** storheter. Det innebär ett tvång på de utförda mätningarna, dvs. att de ska "tvingas in" i förhållande till utgångspunkterna. Resultatet blir alltså påverkat av **både** referenssystemets och mätningarnas osäkerhet. Därför resulterar den fasta utjämningen normalt i något större standardosäkerheter än en fri utjämning.

Fri utjämning

Vad kännetecknar då en fri utjämning, mer i detalj, och vad är största skillnaden gentemot en fast utjämning?

I en *fri utjämning* låses exakt så många storheter som krävs för att ekvationssystemet ska vara lösbart. Sådana nätutjämnings används vanligen som analysverktyg, men det finns även tillämpningar där den fria utjämningen utgör slutresultatet (se nedan).

Antalet storheter (d) som måste låsas är

$$d = (3D - 2) \quad (8.1)$$

där D är den aktuella dimensionen (1, 2 eller 3).

I två dimensioner blir alltså $d = (3 \cdot 2 - 2) = 4$. De fyra parametrar som låses är en punkt (två koordinater: N och E) samt *vridning* (orienterad riktning) och *skala*:

- En av utgångspunkterna får stå kvar som "känd". Den orienterade riktningen kan åstadkommas genom att en fiktiv punkt läggs in i en riktningsserie från den "kända" utgångspunkten och skalan kan bestämmas via de utförda längdmätningarna.

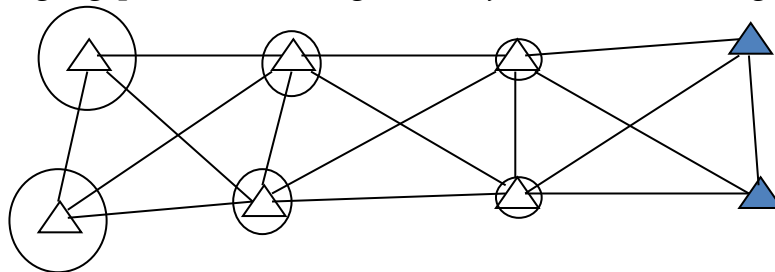
Resten av utgångspunkterna "släpps fria" och bestäms i utjämningen.

Data-snooping kan användas som vanligt för analys av grova fel efter en fri utjämning. En fördel är att eventuella problem endast

beror på fel i mätningarna och tanken är att alla grova mätfel ska kunna elimineras så att endast slumpmässiga avvikelser går vidare till nästa beräkningssteg. Metodens nackdel är att antalet frihetsgrader, och därmed kontrollerbarheten, är något lägre i fria utjämnings jämfört med fasta.

Därför kanske inte alla mätningar kan kontrolleras. Okontrollerbara mätningar kan vara riktningsmätningar mot punkter till vilka avståndsmätningar saknas – exempelvis mätningar mot avlägsna högpunkter, såsom kyrkspiror, vattentorn etc.

Dessutom kan vissa osäkerhetsmått bli svårtolkade, för att inte säga värdelösa, ur analysynpunkt. Det gäller framför allt osäkerhetsellipser och standardosäkerheter i plan. De beror helt på vilka punkter som låses och blir i princip bara ett mått på avståndet till de valda utgångspunkterna. Se Figur 8 och jämför den med Figur 5.a!



Figur 8. Lägesosäkerheten i plan för nätet i Figur 5.a, där de fasta punkterna har flyttats från vänster- till högerkanten. Osäkerheten ökar då i motsatt riktning, från höger till vänster.

Transformation

Transformationen av det fritt utjämnade nätet på utgångspunkterna bör ske på det sätt som beskrivs i Kapitel 7, dvs. med en kombination av Unitär transformation (3 parametrar) och Helmert-transformation (4 parametrar). Det senare motsvarar de låsta storheterna enligt Formel (8.1).

Vi har redan sett att fördelen med en sådan inpassning, jämfört med att gå direkt på nästa steg, är att eventuella felaktigheter i utgångspunkterna då enklare kan lokaliseras. Dessutom kan skalskillnaden mellan mätningarna och referensnätet kontrolleras, eller t.o.m. beräknas.

Hantering av flaggade utgångspunkter och signifikanta skalfaktorer

Vad gör man då i de fall de punkter som har varit tänkta som utgångspunkter "flaggas ut" i koordinattransformationen?

Det viktigaste är att dokumentera problemet! Uteslutna utgångspunkter och motiv för uteslutning ska alltid redovisas i dokumentationen av beräkningsresultatet, dvs. i *resultatrapporten* (se Bilaga B).

Avvikelse i utgångspunkterna kan bero på olika saker men en vanlig orsak är att markeringen har rubbats. En naturlig åtgärd är därför att nybestämma den flaggade punkten inom ramen för det aktuella projektet. Det kräver i regel kompletterande mätningar för att nybestämningen ska kunna ske med tillräckligt liten lägesosäkerhet och för att vidmakthålla kontakten med närliggande punkter av samma dignitet. Mätningar kan därför behöva adderas till den ursprungliga mätplanen.

Stor försiktighet måste dock alltid iakttas vid uteslutning av utgångspunkter. Om orsaken till avvikelserna inte kan förklaras med att punkten har rubbats måste den bakomliggande orsaken utredas. Framför allt måste de mätningar och beräkningar som ligger till grund för de avvikande koordinaterna kontrolleras. Dessutom måste konsekvenserna av ändrade koordinater övervägas. Hur har t.ex. de tidigare koordinaterna för den punkten använts vidare?

På samma sätt måste konsekvenserna av att använda koordinattransformationens skalfaktor i den fasta utjämningsplanen övervägas.

Ur utjämningsynpunkt är det mer optimalt att påföra en signifikant skalfaktor eftersom minsta-kvadratmetoden annars måste hantera motsägelsen via förbättringarna. Men det innebär också att det finns en skilsmässa mellan utgångspunkterna och de nya mätningarna som måste beaktas i den vardagliga användningen av nätet. Effekten blir snarlik den som togs upp beträffande höjd- och projektkorrektion i Kapitel 4.

I ett beställar-/utförarförhållande måste båda dessa frågor tas upp under projektets gång, så att beställaren – som ju kommer att få leva med problemet – kan fatta beslut om vilket förfarande som ska väljas.

Stamnätsberäkningen i sammanfattning

Om vi förutsätter att flaggade utgångspunkter och signifikanta skalfaktorer hanteras enligt ovan så kan beräkningsprocessen sammanfattas i följande steg:

1. Gör en fri utjämningsplan av nätet genom att låsa exakt så många storheter som krävs för att få ett beräkningsresultat utan yttre tvång.
2. Genomför en grovfelssökning med data-snooping för att detektera och åtgärda eventuella grova mätfel. Upprepa om flera fel upptäcks.
3. Gör en koordinattransformation av det fria nätet genom inpassning på de fasta utgångspunkterna (Unitär+Helmert).
4. Analysera den beräknade skalfaktorns signifikans och utgångspunkternas avvikelser.

5. Lås koordinaterna för de utgångspunkter som klarat kontrollen i punkt 4. Är skal faktorn signifikant skild från ett (1) skalas samtliga avstånd om med den nybestämda faktorn.
6. Gör en fast utjämning av nätet.
7. Genomför en ny grovfelssökning med data-snooping för att detektera och åtgärda eventuella "nyttillkomna" grova mätfel. Upprepa om flera fel upptäcks.
8. När allt verkar OK, gå vidare till resultatredovisningen.

Fri utjämning och koordinattransformation som "slutstation"

OBS: Fri utjämning + koordinattransformation kan även vara "slutstation", t.ex. om ett nät med extremt låg lägesosäkerhet bara ska passas in ungefärligt i ett överordnat referenssystem utan att dess geometri påverkas. Det kan då ske med en Helmert-transformation på ett antal utgångspunkter - eller med en unitär, 3-parameter-transformation om skalan ska hållas oförändrad.

På detta sätt kan georeferering (se Kapitel 2) ske parallellt, utan att rucka på kvalitetskraven i det aktuella projektet.

Fast utjämning vs. anslutning genom inpassning

Om anslutningen till överordnat referenssystem ska ske genom en fast utjämning eller - approximativt - genom inpassning kan vanligen beslutas i förväg.

Har utgångspunkterna lägre osäkerhet väljs fast utjämning. Om det nybestämde nätet håller högre kvalitet är normalt inpassning att föredra. Men om kvalitetsrelationen är okänd krävs en empirisk analys innan beslutet om anslutningsförfarande kan fattas.

Åtminstone två analysmetoder ter sig rimliga:

1. Jämförelse av viktenhetens standardosäkerhet (u_o) mellan en fri och en fast utjämning av samma nät.
2. Jämförelse mellan viktenhetens standardosäkerhet från en inpassning av ett fritt utjämnat nät med en skattning av den lokala lägesosäkerheten i detta nät.

Den senare beräknas ur standardosäkerheten för utjämnade avstånd enligt Formel (6.11). Valet Unitär eller Helmert beror på om det finns en signifikant skal faktor eller ej..

Vilken osäkerhet i utgångspunkterna kan då accepteras?

Det kan vara svårt att härleda strikta toleranser för sådana jämförelser. Men en rimlig tumregel beträffande Metod 1 är att $u_o(fast)$ inte bör vara mer än 10% större än $u_o(fri)$, dvs.

$$u_o(fast) \leq 1,1 \cdot u_o(fri) \quad (8.2)$$

för att utgångspunkterna ska anses ha lägre lägesosäkerhet än det nymätta stomnätet.

Motsvarande resonemang vad gäller Metod 2 redovisas i Tabell 8.

Tabell 8. Tolkning av jämförelsen mellan standardosäkerheten från en inpassning (Unitär eller Helmert) och den lokala lägesosäkerheten från en fri utjämning.

$u_o(\text{inpassning}) < u_{\text{lokal}}(\text{fri})$	indikerar att	utgångspunkterna har lägre lägesosäkerhet än nypunkterna
$u_o(\text{inpassning}) \approx u_{\text{lokal}}(\text{fri})$		utgångspunkterna och nypunkterna har ungefär samma lägesosäkerhet
$u_o(\text{inpassning}) > u_{\text{lokal}}(\text{fri})$		utgångspunkterna har högre lägesosäkerhet än nypunkterna

Tumregeln för Metod 2 blir därför att viktenhetens standardosäkerhet från inpassningen bör vara mindre än den lokala lägesosäkerheten från en fri utjämning.

Matematiskt kan det uttryckas som (jfr. Formel 6.11):

$$u_o(\text{inpassning}) < u_{\text{lokal}}(\text{fri}) = u(\bar{l})\sqrt{1 - k_{\text{fri}}} \quad (8.3)$$

där $u(\bar{l})$ är standardosäkerheten för det genomsnittliga punktavståndet \bar{l} och k_{fri} den fria utjämnings k -tal. I så fall bedöms utgångspunkterna ha lägre lägesosäkerhet än det nymätta stomnätet.

En kombination av Metod 1 och 2 bör ge ett bra beslutsunderlag.

Sammanfattande visdomsord

Stomnätsberäkningen bör inledas med en fri nätutjämning, som medger kontroll av mätningarna utan påverkan från utgångspunkterna. Därefter görs en analys med hjälp av koordinattransformation och avslutningsvis en fast utjämning med låsta utgångspunkter.



Om mellansteget (koordinattransformationen) indikerar signifikant skalfaktor och/eller felaktiga utgångspunkter krävs särskilda beslut: Hur ska den beräknade skalfaktorn hanteras och ska utgångspunkterna nybestämmas?

I vissa tillämpningar kan koordinattransformation användas som anslutningsmetod i stället för utjämning med fasta utgångspunkter.

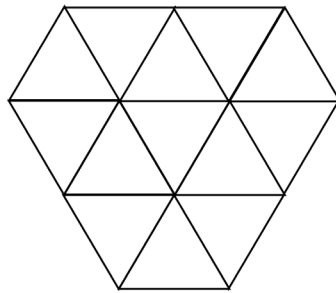
9 Nätsimulering

Nätsimuleringar är avsedda att ge indikationer på eventuella svagheter i ett näts utformning och påvisa hur effektivt grova fel kan lokaliseras. Simulering är alltså egentligen en planeringsmetod och borde därför ha kommit in tidigare i framställningen.

Men det är inte alltid som pedagogiken går hand i hand med arbetsprocessen. Det har helt enkelt bedömts enklare att beskriva utjämningsberäkningen först och se nätsimulering som "beräkning utan data".

Inledningsvis beskrivs datorstöd stornätssimulering. Därefter visas hur det går att komma ganska långt även med ganska enkla metoder och "skrivbordsanalys".

Allra först lägger vi fast den gamla sanningen att "ett vackert nät är ett bra nät". Den tesen gäller, åtminstone om man med vackert avser *symmetriskt, homogent* och med ett *tillräckligt högt k -tal*. Sådana nät byggs med fördel upp av regelbundna trianglar, se *Berlinernätet* i Figur 9.



Figur 9. Ett s.k. Berlinernät, i detta fall med tre inre punkter (centralpunkter).

Det bör emellertid poängteras att *korssyfter*, som skär tvärs igenom ett nät, och riktningsmätning mot avlägsna högpunkter kan vara bra komplement till triangelstrukturen. Detta trots att de ger en rörigare och inte lika "vacker" nätkarta.

Simulering med datorstöd

Om vi alltså betraktar nätsimuleringen som en del av planeringsarbetet så är det i detta skede som utformningen av nätet och mätprogrammet läggs fast. Därför blir det naturligt att här summera vilka aspekter som bör läggas på denna *nätdesign*.

För ett traditionellt triangelnät gäller:

- Nätet bör vara homogent, dvs. regelbundet och med en jämn fördelning av såväl utgångspunkter och nypunkter som mätningar.
- Samtliga nypunkter ska inneslutas av utgångspunkterna (se Figur 7) och punktavstånden bör vara ungefär lika.

- Det bör råda balans mellan längd- och riktningsmätningen, såväl vad gäller antalet mätningar som mätosäkerheten.
- Kraven på lägesosäkerhet, förslagsvis formulerade som standardosäkerheten i utjämnade avstånd, ska vara uppfyllda.
- Standardosäkerheten i plan kan vanligen tonas ned, men osäkerhetsellipserna bör vara nära cirkulära.
- Ingen mätning bör ha ett individuellt k -tal $< 0,5$ och k -talen bör inte variera alltför mycket.
- Det kräver normalt att det övergripande k -talet, för hela nätet, ligger gott och väl över den gränsen, åtminstone runt 0,60-0,65.

$k = 0,5$ ger en tillförlitlighet i enlighet med exemplet på sidan 27 i Kapitel 6, vilket brukar anses vara tillräckligt bra utan att vara överambitiöst; alltför höga k -tal kan leda till orimligt höga kostnader för genomförandet! Om simuleringsprogrammet även redovisar MUF och YT kan exemplets värden alltså ses som toleranser för dessa storheter, dvs:

- $MUF \leq 4 \cdot u(l_i)$; 4 gånger mätningens standardosäkerhet
- $YT \leq 2 \cdot u(l_i)$; 2 gånger mätningens standardosäkerhet, eller
- $YT \leq 2,8 \cdot u(l_i + v_i)$; 2,8 gånger den **utjämnade** mätningens standardosäkerhet.

Om utgångsförslaget till nätutformning inte uppfyller ovanstående fordringar kan en modifiering av mätprogrammet vara nödvändig. Nätanalysen ska alltså ge vägledning för bedömningen av om det behövs extra mätningar – eller om vissa mätningar t.o.m. kan strykas.

OBS: I simuleringen ingår normalt samtliga utgångspunkter som fasta punkter, dvs. de betraktas som felfria. Därför kan det vara bra att ha "litet i reserv" eftersom så knappast är fallet (några extra mätningar, något lägre mätosäkerhet, litet högre k -tal etc. i förhållande till ställda krav).

Skrivbordstest av ett stamnätsförslag

Med erfarenhet och några tumregler går det att komma ganska långt i analysen av ett stamnätsförslag även utan datorstöd, vilket följande exempel från Persson (1981) visar.

Exempel: Nätet nedan innehåller:

- 6 utgångspunkter,
- 6 nypunkter (p),
- 34 längder (l) samt
- 12 riktningsserier (z) med sammanlagt 48 riktningar (r).

Antalet mätningar blir $34 + 48$, dvs. $n = 82$. Antalet obekanta är $6 \cdot 2 = 12$ koordinater och 12 orienteringsvinklar (1 per riktningsserie), vilket ger $m = 24$.

Mätningarna har standardosäkerheterna

$$u(l) = 25 \text{ mm}$$

$$u(r) = 0,35 \text{ mgon}$$

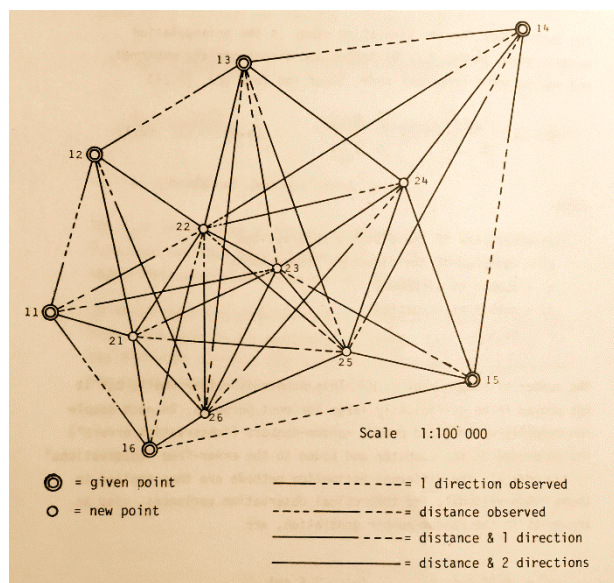
och den genomsnittliga sidlängden är ca 5 km.

Det totala antalet frihetsgrader blir:

$$f = l + r - 2p - z = 34 + 48 - 2 \cdot 6 - 12 = 58$$

dvs. totala antalet mätningar minus antalet obekanta:

$$f = n - m = 82 - 24 = 58$$



Riktningmätningens standardosäkerhet omräknat till tvärmått blir

$$\tan(0,35 \text{ mgon}) \cdot 5000 = 0,027 \text{ meter eller } 27 \text{ mm}$$

att jämföras med längdmätningens 25 mm. Det råder alltså god balans mellan längd- och riktningmätningens osäkerhet.

Det övergripande k -talet blir

$$k = 58/82 = 0,71$$

som ligger väl över 0,5-gränsen.

Utgående från längdmätningens standardosäkerhet (25 mm) får vi följande approximativa värden på den inre och yttre tillförlitligheten för $k = 0,71$.

Formel (6.6) ger

$$MUF = \frac{\delta_o}{\sqrt{k}} \cdot u(l_i) = \frac{2,8}{\sqrt{0,71}} \cdot u(l_i) = 3,3 \cdot 25 = 83 \text{ mm}$$

Formel (6.7.a) ger

$$YT = (1 - k) \cdot MUF = 0,29 \cdot 3,3 \cdot u(l_i) = 0,96 \cdot 25 = 24 \text{ mm}$$

Formel (6.7.b) ger det alternativa uttrycket

$$\begin{aligned} YT &= 2,8 \sqrt{\frac{1-k}{k}} \cdot u(l_i + v_i) = 2,8 \sqrt{\frac{1-0,71}{0,71}} \cdot u(l_i + v_i) = 1,8 \cdot u(l_i + v_i) \\ &= 1,8 \cdot 13,5 = 24 \text{ mm} \end{aligned}$$

eftersom standardosäkerheten i utjämnad längd är

$$u(l_i + v_i) = u(l_i) \sqrt{1-k} = 0,54 \cdot u(l_i) = 13,5 \text{ mm}$$

enligt Formel (6.8). Värdena för MUF och YT klarar gott och väl de toleranser som angavs ovan, beräknade för $k = 0,5$. Toleranserna är $4 \cdot 25 = 100 \text{ mm}$ för MUF och $2 \cdot 25 = 50 \text{ mm}$ för YT .

Om standardosäkerheten i utjämnat avstånd tolkas som ett mått på den lokala lägesosäkerheten i plan, enligt Formel (6.11), så är den alltså i genomsnitt 13,5 mm för nypunkterna i detta nät.

Motsvarande skattning för en fri utjämnning av nätet ($k_{fri} = 0,6$) blir

$$u(l_i + v_i) = u(l_i) \sqrt{1-0,6} = 0,63 \cdot u(l_i) \approx 16 \text{ mm}$$

Det blir också toleransen – enligt Formel (8.3) – för standardosäkerheten i en inpassning av en fri utjämnning av detta nät mot de fasta utgångspunkterna. Ett överskridande av detta gränsvärde skulle indikera att utgångspunkternas lägesosäkerhet är högre än det nymätta nätet lokala lägesosäkerhet. Det kan i så fall påverka beslutet om vilket anslutningsförfarande som bör väljas – allt enligt diskussionen i slutet av Kapitel 8.

OBS: MUF och YT har genomgående uttrycks i längdmått. Det beror dels på kopplingen till den lokala lägesosäkerheten, dels på att längdmått är lättare att intuitivt förstå än vinkelmått. Men om – som i detta exempel – balans råder mellan längd- och riktningsmätningen så blir förhållandena vad gäller grovfelssökning och tillförlitlighet likartade även för riktningsmätningen.

Sammanfattande visdomsord

Ett symmetriskt nät är ett bra stomnät. I planeringen kommer man långt med en nätkarta och några överslagsberäkningar. Om ett simuleringsprogram används bör det vara baserat på kontrollerbarhet och tillförlitlighet snarare än lägesosäkerhet.



10 Stommättningsprocessen – från planering till resultatredovisning

I detta kapitel sammanfattas stommättningsprocessen i form av en *processbeskrivning* för att ta fram ett triangelnät.

Det är viktigt att tänka på redovisningen redan från början, så att det momentet kan gå parallellt genom hela processen. Ett tips kan vara att kontinuerligt skriva "dagbok", för att inte glömma väsentliga detaljer från de inledande faserna vid redovisningen av slutresultatet några veckor senare. Ett annat förslag är att lägga in avstämningar under projektets gång, för delredovisning och dialog mellan utföraren och beställaren/uppdragsgivaren.

I Bilaga B ges förslag på vilka **mättnings- och beräkningstekniska** krav som uppdragsgivaren bör ställa i den *tekniska specifikationen* samt hur utföraren kan visa att kraven är uppfyllda i sin *stomnätsredogörelse*. De rent **juridiska/upphandlingstekniska** aspekterna har tonats ned i såväl nedanstående process som i Bilaga B.

1) Tydliggör roller och ansvar

- Aktörer (beställare, utförare/projektansvarig, ev. underleverantörer)

2) Klargör övriga förutsättningar

- Översiktlig produktbeskrivning + nätets tänkta användning
- Referenssystem i plan och höjd
- Generella krav (kompetens, tidsramar, leveranser)

3) Ange produktkrav

- Krav på nätutformning (punkttäthet/punktavstånd, punktplacering/tillgänglighet, markering)
- Kvalitetskrav (mät- och lägesosäkerhet, kontrollerbarhet/tillförlitlighet, kontroller/kontrollmetoder/kontrollmått, toleranser)

4) Redovisa underlag

- Kartor/flygbilder
- Utgångspunkter (nätkartor, koordinater/höjder, punktbeskrivningar)
- Tidigare stomnätsprojekt inom området (redogörelser)

5) Planera och rekognoscera

- Utgångsförslag
- Simulering
- Färdigt skrivbordsförslag (nätkarta, mätprogram)
- Rekognoscering

 Avstämning – beslut

6) Markera

- Punktmarkeringar
- Försäkringsmarkeringar/ återfinningsmärken
- Ev. punktbeskrivningar

7) Mät

- Instrumentkalibrering (bevis/certifikat)
- Mätning
- Fältkontroll

8) Analysera

- Fri utjämning
- Koordinattransformation
- Fast utjämning
- Analys (data-snooping, kontrollerbarhet/tillförlitlighet, skalfaktor, lägesosäkerhet i utgångspunkterna)
- Åtgärdsförslag

➡ Avstämning - beslut

9) Slutberäkna och redovisa

- Slutgiltig beräkning
- Fullständig redovisning

➡ Slutredovisning - godkännande

10) Avsluta projekt

- Planera uppföljning
- Dokumentera erfarenheter

Observera särskilt punkt 10, som bäddar för nästa stomnätsprojekt genom "erfarenhetsåtervinning".

Sammanfattande visdomsord

Planera för dokumentationen och dokumentera planeringen. Skriv dagbok från dag 1, framför allt vad gäller problem och gjorda ställningstaganden.

Redovisning till uppdragsgivaren bör ske kontinuerligt under arbetets gång. Särskilda avrapporteringstillfällen bör planeras in där beslut tas om arbetets fortsättning.

Dokumentera även gjorda erfarenheter till nästa projekt.



11 Höjdnät, polygonnät och 3D-nät

Vad är det då som är specifikt för det två-dimensionella triangelnätsfallet och vad kan utvidgas till andra nättyper och andra dimensioner?

I detta kapitel ges en översiktlig redovisning av beräkning – och framför allt kontroll – av höjdnät, polygonnät samt GNSS-mätta och terrestra 3D-nät.

Tågformade nät

Definitioner

En sammanhängande sekvens av mätningar benämns *tåg*, t.ex. *höjdtåg* (1D) eller *polygontåg* (2D). Flera tåg bildar tillsammans ett nät: *höjdtågsnät* för höjdbestämmning och *polygonnät* för beräkning av plana koordinater.

Tågens ändpunkter utgörs av kända utgångspunkter eller nyberäknade *knutpunkter*, där tre eller flera tåg möts. Om ett tåg startar och slutar i samma punkt används i stället termen (sluten) *slinga*. Slingor bildas framför allt för att möjliggöra kontroll av mätningar före den slutliga beräkningen.

Tåg och tågformade geodetiska nät har genomgående en svag geometri. Ett tåg har alltid störst lägesosäkerhet på mitten och kontrollerbarheten, och därför tillförlitligheten, minskar med antalet mellanpunkter. Data-snooping i sin ursprungliga tappning är vanligen inte tillämplig och inte heller fri utjämning med transformation som analysmetod.

Beräkning av tågformade nät sker vanligen med speciella metoder där tåget, och inte den enskilda mätningen, utgör minsta enhet. Först bestäms knutpunkterna och sedan fördelas motsägelserna – som benämns *slutningsfel* – inom respektive tåg. Det begränsar även möjligheterna till detaljstudier av lägesosäkerhet och tillförlitlighet mellan knutpunkterna, dvs. inuti tågen.

Principen för toleranser

I stället för data-snooping finns en tradition att ställa upp toleranser för hur stora slutningsfelen får vara, beroende på tågets längd. I [HMK-Stommätning 1993](#) är dessa utformade i enlighet med HMK:s trenivåprincip (se slutet på Kapitel 1) som i detta sammanhang kan uttryckas på följande sätt:

- I. Minst $2/3$ av tågen bör ha slutningsfel som är mindre än $1/3$ av toleransen. Det är ett *fördelningstest*.
- II. Minst 95 % av tågen bör ha slutningsfel som är mindre än $2/3$ av toleransen, som är *varningsgräns*.

- III. Inget tåg ska ha ett slutningsfel som är större än toleransen, som alltså är en *kassationsgräns*.

Med hjälp av slutningsfelet i ett tåg kan slutsatsen dras **att** något är fel, men vanligen inte **var** i tåget felet ligger. Ofta krävs ommätning av hela tåget för att hitta grova fel.

Felsökning i slingor

Därför bör så mycket som möjligt av felsökningen ske före beräkningen. Dubbelmätning i fält har redan nämnts som metod, men som också har antytts finns det även möjligheter till "skrivbordskontroll" innan man går vidare till utjämning.

Det sker genom beräkning av slutningsfel i slingor och tåg mellan kända punkter. I slingor utgörs slutningsfelet av skillnaden mellan utgångs- och slutvärdena, vilka teoretiskt sett ska vara identiska. För tåg definieras slutningsfelet som avvikelserna mellan mätresultatet och motsvarande storhet beräknad med hjälp av utgångspunkterna.

Exempel på slutningsfel är *vinkelslutningsfel* och (radiella) *koordinat-slutningsfel* i polygontåg samt *höjdslutningsfel* i höjdtåg. Slingor för kontroll kan skapas i alla typer av nät, fast på olika sätt. I många programvaror finns funktioner som automatiskt genererar slingor och redovisar slutningsfel. Genom att jämföra och kombinera slingor kan ofta ett felaktigt tåg pekats ut redan före utjämningen.

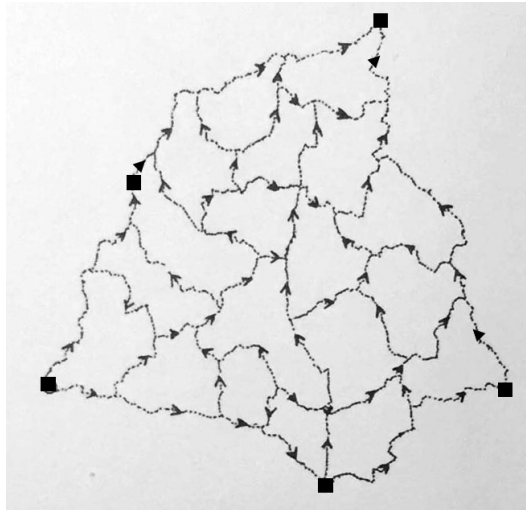
Kontroll genom slutningsfel får här ersätta momentet med fri utjämning och koordinattransformation vid utjämning av triangelnät.

Utformning av höjdtågsnät

Förutom de redan nämnda höjdtågsnäten, som normalt bestäms genom avvägning, förekommer även *trigonometriska höjdnät*. I de senare används *trigonometrisk höjdmätning* och de förekommer vanligen som en integrerad del av terrestra 3D-nät, se nedan.

Höjdtågen i ett höjdtågsnät är i sin tur uppdelade i *fixhåll*, vilka går mellan *höjdfixar* som i sin tur består av ett antal *instrumentuppställningar*. Vid utformningen av höjdtågsnät stipulerar [HMK-Stommätning 1993](#) att:

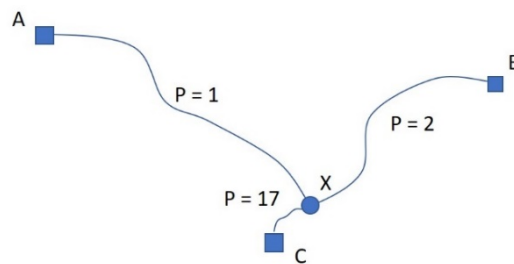
- nätet bör vara homogent och de ingående tågen bör vara ungefär lika långa
- nätets k -tal bör vara > 0.3
- tågen bör dubbelmätas, dvs. mätas en gång i vardera riktningen.



Figur 11.a. Exempel på ett höjdtågsnät bestämt genom avvägning. $k=0,41$.

Att uppfylla $k > 0,3$ är normalt inga problem; se det ganska typiska exemplet i Figur 11.a (Persson, 1986c). Viktigare är att åstadkomma lika långa tåg.

Exempel: Vikterna vid utjämning av höjdtågsnät sätts omvänt proportionella mot tåglängden - och det finns ett samband mellan ett tågs vikt och tågets k -tal, vilket följande exempel med *enkel knutpunkt* visar.



Mätning	Avstånd, km (d)	Vikt ($1/d$)	k_i	osynlig del av ev. grovt fel
A - X	1,000	1	0,95	5 %
B - X	0,500	2	0,90	10 %
C - X	0,059	17	0,15	85 %

Det vi kan se är att mätningar med lägre vikt får stor "hjälp" av den mätning (C - X) som har mycket stor vikt. Tillförlitligheten i de sämre mätningarna blir därför stor; merparten av ett eventuellt grovt fel "syns" i motsvarande förbättring. För den tredje mätningen är förhållandet det motsatta: Den stöds inte av de två andra mätningarna så endast 15% av ett grovt fel skulle synas i dess förbättring! Resten skulle förändra - eller rättare sagt fördärva - beräkningen av höjden på punkt X.

Detta visar att homogenitet och likformighet är av stor betydelse även vid design av höjdtågsnät - precis som för triangelnät.

I [HMK-Stommätning 1993](#) finns i Bilaga A.5 ett antal tabeller med toleranser – där benämnda *felgränser* – för kontroll av höjdtågsnät:

- **Tabell A.10:** Avvikelse mellan dubbelmätta höjdskillnader.
- **Tabell A.11:** Slutningsfel i slingor och tåg mellan kända punkter.
- **Tabell A.12:** Beräknade standardosäkerheter (medelfel)
- **Tabell A.13 och A.14:** Slutningsfel efter utjämning för anslutningsnät resp. bruksnät i höjd.

Toleranserna baseras på följande standardosäkerheter för **dubbelmätta** höjdtåg (tur- och returmätning):

$$u(\text{anslutningsnät}) = 1,5 \text{ mm}/\sqrt{km} \quad (11.1)$$

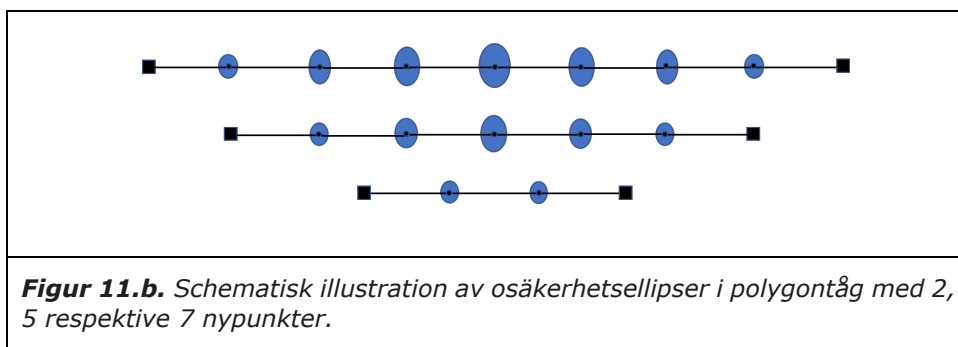
$$u(\text{bruksnät}) = 5 \text{ mm}/\sqrt{km} \quad (11.2)$$

men de kan enkelt skalas om till att gälla för andra mätosäkerheter.

Polygontåg och polygonnät

Problematiken beträffande polygontåg är snarlik den för höjdtåg, men polygontågen är ännu "svajigare". Det beror främst på kombinationen längd- och riktningsmätning och accentueras om sidlängderna varierar mycket inom tåget. Korta punktavstånd är också ogynnsamma och tågen bör vara så sträckta som möjligt.

Liksom för alla andra tåg ökar standardosäkerheten i plan i ett polygontåg med antalet nypunkter och är störst på mitten. Det samma gäller osäkerhetsellipsernas storlek (se Figur 11.b) – och även kontrollerbarheten, och därmed tillförlitligheten, försämras.



Om k -talet beräknas på samma sätt som för triangelnät så blir formeln för polygontåg

$$k = \frac{3}{5+3mp} \quad (11.3)$$

där mp betecknar antalet mellanpunkter, alltså exkl. start- och slutpunkt. Denna formel genererar k -värdena i Tabell 11.a.

Tabell 11.a. Kontrollerbarheten i polygontåg beror på antalet mellanpunkter enligt Formel (11.3).

Antal mellanpunkter (mp)	1	2	3	5	10
k -tal	0,38	0,27	0,21	0,15	0,09

OBS: Polygontåg har ofta ett k -tal på ca. 0,1–0,2. Det innebär att bara 10–20 % av ett grovt fel syns i motsvarande förbättring och att mätfel i storleksordningen 4–5 cm utan vidare kan förbli oupptäckta. Sådana grova fel påverkar dessutom resultatet (koordinaterna) med nästan samma belopp.

Precis som för höjdtåg kan polygontåg kombineras ihop till nät, polygonnät. Mellan "vanliga" polygonnät och triangelnät finns en sorts mellanform som benämns *storpolygonnät*.

För utformning av polygonnät anger [HMK-Stommätning 1993](#) att:

- Storpolygonnät bör bestå av högst 4 nypunkter/tåg, med ett punktavstånd på ca. 0,5–1,5 km.
- I traditionella polygonnät accepteras kortare punktavstånd, men sidlängder under 50 meter bör undvikas och antalet nypunkter i ett tåg endast i undantagsfall överstiga 4 st.
- Om parallella tåg finns kan anslutning mellan dessa göras i form av tvärtåg; sådana bör läggas in om avståndet mellan de parallella tågen understiger en tredjedel av tågens genomsnittslängd.

För polygontåg och polygonnät finns både "stränga" och förenklade beräkningsmetoder. Vid användning av stränga utjämningsmetoder måste viktsättningen mellan riktningar och längder var korrekt och dessa metoder har svårt att hantera ev. skalfel mellan nymätningen och utgångspunkterna. Bågformade tåg är särskilt kritiska. (Nyberg & Persson, 1976).

En fördel med de stränga metoderna är att nätet inte behöver bestå av "perfekta" tåg. Förstärkningar av nätet med t.ex. korsryfter – tvärs igenom nätet, eller mot avlägsna högpunkter – kan därför hanteras (jfr. triangelnät i texten under Figur 9). I övrigt är förenklade utjämningsmetoder tämligen robusta och ofta väl så bra som de stränga.

I Bilaga A.5 i [HMK-Stommätning 1993](#) finns tabeller med toleranser (felgränser) för kontroll av polygontåg och polygonnät. I dessa inkluderas även kontroll av storpolygonnät och triangelnät:

- **Tabell A.1** och **A.2:** Fältkontroll av riktningsmätning resp. dubbelmätta längder.

- **Tabell A.3 och A.4:** Slutningsfel i slingor och tåg mellan kända punkter (vinkelslutningsfel resp. radiella koordinat-slutningsfel).
- **Tabell A.5 och A.6:** Slutningsfel i bruksnät efter utjämning (vinkelslutningsfel resp. radiella koordinat-slutningsfel)
- **Tabell A.7:** Skattning av viktenhetens standardosäkerhet (grundmedelfelet).
- **Tabell A.8 och A.9:** Sträng utjämning av storpolygonnät och triangelnät (förbättringar till mätta riktningar resp. längder).

Toleranserna baseras på de standardosäkerheter (medelfel) som anges i Bilaga A.3.1-A.3.3 i [HMK-Stommätning 1993](#). Vanligen diskuteras inte standardosäkerheten i plan (*punktmedelfelet*) i samband med polygonnät.

Tre-dimensionella nät

GNSS-mätta 3D-nät och terrestra 3D-nät skiljer sig en hel del från varandra. Delvis är det en konsekvens av skillnaden i teknik men dessutom är de terrestra näten ofta *lokala* till sin karaktär medan de GNSS-baserade vanligen har en större *regional* utbredning.

Det finns dock terrestra 3D-nät som har en stor regional utbredning och det är stomnät för mätning av *långsträckta objekt*, t.ex. vid anläggning av vägar, järnvägar, broar och tunnlar. Detta behandlas i en kommande skrift i HMK:s tekniska rapportserie.

Baslinjer i GNSS-mätta 3D-nät

”Byggstenarna” vid etablering av GNSS-mätta 3D-nät benämns *baslinjer*. Det är tre-dimensionella *rymdvektorer* mellan två mätpunkter.

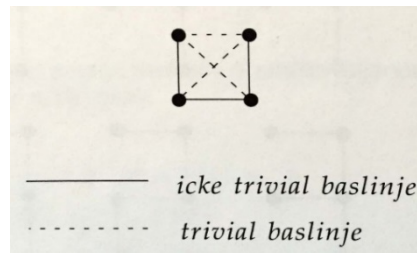
En baslinje från punkt P_i till punkt P_j skrivs på formen

$$R_{ij} = (\Delta X_{ij}, \Delta Y_{ij}, \Delta Z_{ij}) = (X_j - X_i, Y_j - Y_i, Z_j - Z_i) \quad (11.4)$$

och ska inte blandas ihop med ett avstånd. Eftersom baslinjen är en vektor så innehåller den även riktningssinformation – i detta fall i 3D, dvs. tre rotationer.

Vid stommätning med GNSS-teknik används två eller flera mottagare samtidigt, i en *session*. Beroende på antalet mottagare i varje session kan två eller flera baslinjer konstrueras.

Men inte alla baslinjer blir *linjärt oberoende*. De baslinjer som kan konstrueras ur andra baslinjer kallas *triviala* medan de oberoende benämns *icke-triviala*, se exemplet med en session bestående av fyra mottagare i Figur 11.c.



Figur 11.c. Triviala och icke-triviala baslinjer för en session med fyra mottagare. En sådan ger 3 icke-triviala och 3 triviala baslinjer, totalt 6 st.

De generella formlerna för antalet baslinjer i en session med m st. mottagare ges av följande uttryck ([HMK-GPS 1993](#), avsnitt 4.5):

$$b = m - 1 \quad (11.5)$$

$$b' = \frac{(m-1)(m-2)}{2} \quad (11.6)$$

$$b + b' = m \frac{(m-1)}{2} \quad (\text{totalt antal baslinjer/session}) \quad (11.7)$$

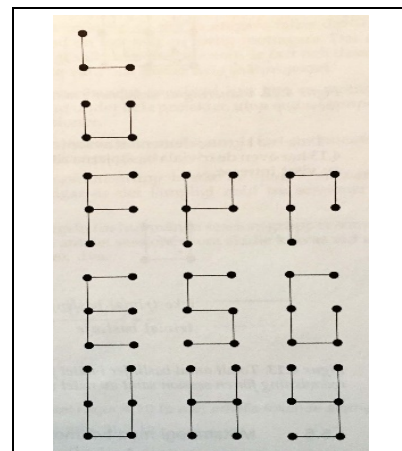
där b är antalet icke-triviala och b' antalet triviala baslinjer i den aktuella sessionen. Det stämmer med exemplet i Figur 11.c ($m = 4$).

OBS: Det är **antalet** baslinjer av vardera slaget som formlerna anger. Med tre eller fler mottagare finns det olika sätt att definiera vilka **fysiska** baslinjer som ska vara av det ena eller andra slaget.

Planering av ett GNSS-mätt stomnät

Vid planering av ett helt stomnät konstrueras fyrhörningar mellan punkterna i nätet och "grundelement" av det utseende som redovisas i Figur 11.d placeras in i dessa.

Endast icke-triviala baslinjer ingår i grundelementen och ingen skillnad görs mellan utgångs- och nypunkter i detta skede.



Figur 11.d. De viktigaste grundelementen för sessioner med 3-6 mottagare.

Ytterligare planeringsförutsättningar ges av följande formler:

$$s = \frac{2(p-\sqrt{p})}{(m-1)} \quad (11.8)$$

där s är antalet sessioner, avrundat till närmast högre heltal, och p det totala antalet punkter (nya + utgångspunkter). Vidare

$$B = s(m - 1) \quad (11.9)$$

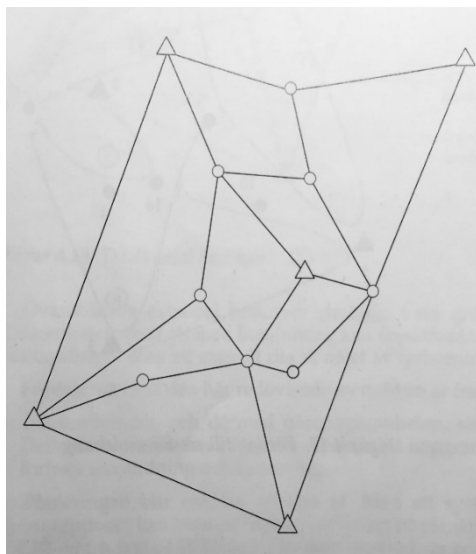
$$q = B - p + 1 \quad (11.10)$$

där B är det totala antalet icke-triviala baslinjer och q antalet kvadrater. Storheten q är emellertid en approximation; det är inte alltid möjligt – eller åtminstone inte alltid lämpligt – att konstruera exakt detta antal fyrhörningar i ett nät.

Exempel: Följande skrivbordsplanering publicerades först i Lithén & Persson (1991) men finns även i HMK - GPS 1993.

Vidstående nät ska bestämmas med GNSS. Utgångspunkterna är markerade med trianglar och nypunkterna med cirklar.

Ett förslag till indelning av nätet i fyrhörningar har redan gjorts – men andra indelningar är naturligtvis också möjliga.



Fyra GNSS-mottagare är tillgängliga ($m = 4$), och det finns tretton punkter i nätet ($p = 13$).

Formlerna (11.8-11.10) ger:

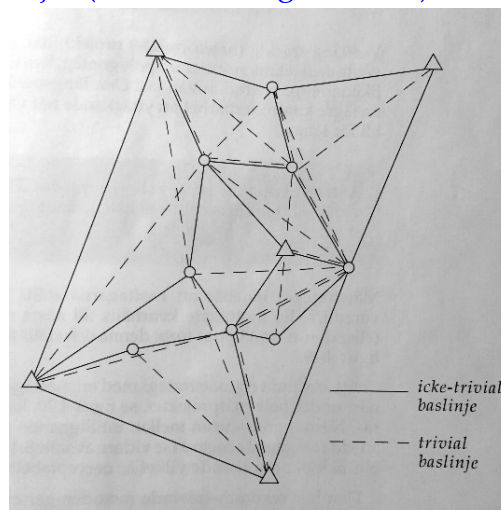
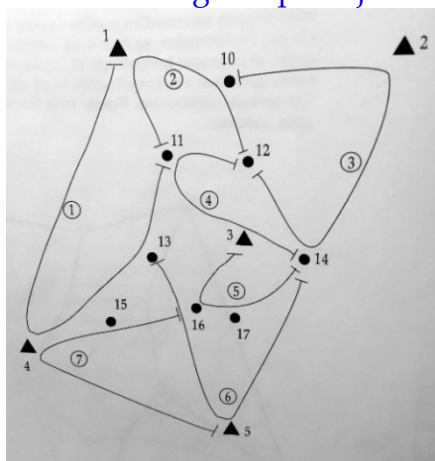
$$s = \frac{2(13 - \sqrt{13})}{(4-1)} = 6,26 \dots := 7$$

$$B = 7(4 - 1) = 21$$

$$q = 21 - 13 + 1 = 9$$

Alltså krävs 7 sessioner med 4 mottagare/session för att "fylla" 9 fyrhörningar med 21 icke-triviala baslinjer (och lika många triviala).

Det kan t.ex. göras på följande sätt:



Till vänster redovisas förslaget till sessionsindelning och i den högra nätkartan har samtliga baslinjer ritats in, både de triviala och de icke-triviala.

Om "fyrhörningsprincipen"

Syftet med "fyrhörningsprincipen" är egentligen att efterlikna de terrestra stomnätens "spindelnätsdesign". Den betonar **närsambandet**, dvs. att det finns mätningar mellan närliggande punkter.

Om fyrhörningarna görs ungefär lika stora erhålls dessutom ett **homogent nät**. Och om minst en icke-trivial baslinje mäts i varje fyrhörnings samtliga sidor kommer planeringsmetoden även att generera **en överbestämning per obekant** – eller möjligen strax därunder i en helt fri utjämning.

Dessutom underlättas beräkning och kontroll eftersom baslinjekonfigurationen är klar och lämpliga slingor för felsökning finns framme redan vid planeringen.

Normalt underlättar fyrhörningsprincipen logistiken vid flytt av mottagare mellan sessionerna. Detta genom att endast en delmängd av mottagarna behöver flyttas mellan varje session, enligt ett rullande schema som så småningom täcker hela nätet. (Detta visas tydligt i det kompletta exemplet som finns i [HMK-GPS 1993](#), avsnitt 4.7.)

Men allt detta blir en skrivbordsprodukt om hänsyn inte tas till den **faktiska** kartbilden – dvs. terrängen, framkomligheten och vägnätet. Men även om sådana hänsyn måste tas bör fyrhörningsmodellen vara grundprincip i planeringen.

Beräkning av GNSS-mätta stomnät

Eftersom utjämning och analys är huvudnumret i denna rapport så hoppar vi över själva mätningen och går direkt från planering till beräkning.

Följande beskrivning av beräkningsgången vid utjämning av GNSS-mätta stomnät är mycket översiktlig. Den baseras till stor del på Kapitel 6 i [HMK-GPS 1993](#) och innehåller flera passager som vi känner igen från beräkning och analys av två-dimensionella nät. (Hänvisningar till avsnitt och tabeller avser nyss nämnda HMK-dokument.)

Vi väljer att inte redovisa tabellerna och toleranserna explicit. Mot bakgrund av teknikutvecklingen kan det finnas anledning att se över vissa av siffervärdena, men principerna är tämligen tidlösa.

Beräkning av initialkoordinater

Eftersom GNSS-mätningen är relativ till sin karaktär så behövs (bra) *initialkoordinater* för en startpunkt i nätet. Den informationen förs sedan vidare till övriga punkter och på så sätt utförs GNSS-beräkningarna i rätt absolutläge.

Utjämning och kontroll av baslinjer

Baslinjerna beräknas antingen en i taget i ett *baslinjeprogram* eller i ett *multistationsprogram*, som kan hantera fler än två stationer samtidigt. Vanligen finns i dessa program felsökningsalgoritmer à la data-snooping.

För att på något sätt ta hand om korrelationerna mellan baslinjerna vid användning av ett baslinjeprogram bör samtliga baslinjer tas med i beräkningen, även de triviala (se OBS-kommentaren under denna tabell).

De baslinjer som inte får en tillfredställande lösning tas bort och ingår inte i den fortsatta beräkningen. En kompletterande kontroll kan göras av dubbelmätta baslinjer och slutningsfel i slingor, se **avsnitt 6.3.1-6.3.2**.

Toleranser för detta finns i **Tabell A.1** och **A.2**. Toleranser (varningsgräns) vid kontrollmätning av baslinjer med EDM-instrument kan hämtas från **avsnitt A.3**.

Efter dessa inledande steg bör analys göras av om nätet fortfarande har en fullgod baslinjekonfiguration. Samtliga baslinjer som tagits bort redovisas i resultatrapporten.

Fri utjämning

Nätberäkningsprocessen inleds med en fri 3D-utjämning av de godkända baslinjerna från baslinjeutjämningen. Ett förslag till viktning av baslinjerna ges i **Tabell 6.1**.

I utjämningen kontrolleras baslinjerna med statistiska tester av standardiserade residualer med data-snooping. Felgränser för de standardiserade förbättringarna anges i **avsnitt A.2**.

Baslinjer med grova fel tas bort successivt. Återigen bör undersökning göras av hur detta påverkar nätets och observationernas k -tal. Baslinjer som tas bort ska redovisas i resultatrapporten, om möjligt även anledningen till uteslutningen.

Inpassning av fri utjämning

Sedan alla grova fel har tagits bort utförs en inpassning av den fria utjämnings resultat mot de kända utgångspunkterna. Det kan antingen ske med en tre-dimensionell Helmert-inpassning (7 parametrar) eller en kombination av två-dimensionell Helmert och en separat höjdinpassning – det senare förutsatt att de tre-dimensionella koordinaterna har konverterats till plana koordinater och höjder (dokumentera den geoidmodell som då har använts!).

Inpassningen kontrolleras med avseende på viktenhetens standardosäkerhet (grundmedelfel), skala och vridning. "Normala" värden på dessa storheter ges i **Tabell 6.2**. Avvikelserna i passpunkterna – *restfelen* – analyseras med data-snooping. Utgångspunkter som tas bort från fortsatt beräkning (se Tabell 7.b på sid. 33 i denna rapport) redovisas i resultatrapporten.

Koordinatberäkning genom utjämning och/eller inpassning med kända utgångspunkter

För beräkning av definitiva koordinaterna görs en utjämning med kända utgångspunkter som fasta. Endast godkända mätningar och utgångspunkter från tidigare steg tas med i beräkningen. Data-snooping används återigen för detektering av grova fel.

Alternativt kan inpassning enligt föregående punkt utgöra det sista steget i beräkningen, se sista avsnittet i Kapitel 8.

OBS: Förfarandet att ta med såväl icke-triviala som triviala baslinjer i beräkningen är ett substitut för att använda en full varians-/kovariansmatris – vilket kan vara komplicerat eller t.o.m. omöjligt, bl.a. beroende på den programvara som används.

Genom detta tillvägagångssätt blir viktberäkningen enklare och resultatet inte på något avgörande sätt sämre. Den enda korrektion som egentligen behöver göras är multiplicera viktenhetens standardosäkerhet med faktorn f_{korr} , beräknad med följande formel från [HMK-GPS 1993](#) (överst på sidan 82):

$$f_{korr} = \sqrt{n_{tot}/n_{it}}$$

där

n_{tot} = totala antalet baslinjer i utjämningen

n_{it} = antalet icke-triviala baslinjer

Eftersom $f_{korr} > 1$ kommer den korrigerade standardosäkerheten att bli större än den okorrigerade, vilket är naturligt eftersom den senare är baserade på korrelerade mätningar och därför alltför optimistisk.

I exemplet på sid 55 blir

$$f_{korr} = \sqrt{42/21} = \sqrt{2} = 1,414 \dots$$

dvs. en ökning av den okorrigerade standardosäkerheten med 41%.

Stommätning vs. nätverks-RTK

Det som kännetecknar stommätning är bl.a. att punkterna markeras, att närsambandet upprätthålls genom samtidig mätning på närliggande punkter samt att beräkningen sker i en gemensam, överbestämd utjämning, där samtliga mätningar och nypunkter ingår.

I början av detta avsnitt nämndes att stommätning med GNSS-teknik skiljer sig från RTK-mätning mot referensstationer genom att flera mottagare mäter samtidigt på ett antal stompunkter.

För att förstärka detta uttalande bör det omformuleras till att:

- RTK-mätning mot fasta referensstationer är INTE en stommätningss metod!

Eftersom det då inte existerar några mätningar **mellan** de nybestämda punkterna, finns inte den "fackverksstruktur" som kännetecknar ett stomnät. Punkterna kan därför inte betraktas - och hanteras - som en sammanhållen enhet. Koordinattransformation av ett sådant "nät" kan t.ex. inte rekommenderas!

Men det finns situationer när RTK kan komma in i bilden även vid stommätning, t.ex. för att bestämma utgångspunkter för lokala nät, i stället för att etablera fristående s.k. 1000/1000-system.

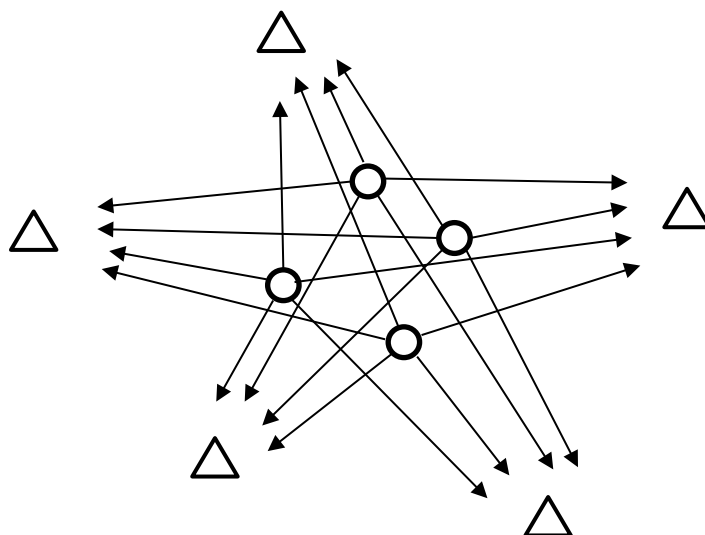
Terrestra 3D-nät

Ett typiskt terrestrert 3D-nät har en begränsad utsträckning och höga kvalitetskrav. Exempel kan vara stomnät för bygg & anläggning, övervakningsnät för kontroll av sättningar, dammar etc. samt inomhusnät t.ex. i industrier. Vi tar här endast upp en typ av terrestra 3D-nät: s.k. "fristationsnät".

Fristationsnät

Med *fristationsnät* avses här terrestra 3D-nät där *fria stationer* används såväl vid nätets inmätning som vid dess användning. Med *fri station* avses en instrumentuppställning som inte görs över en markerad punkt utan där skärningen mellan instrumentets horisontal- och vertikalaxel definierar den aktuella punktens läge.

I stället består fristationsnätets punkter av fasta markeringar, som sitter på olika höjd och omger det aktuella projektområdet. De mäts in från ett antal omarkerade fria stationer på marken på det sätt som beskrivs i Figur 11.e.



Figur 11.e. Inmätning av ett fristationsnät från fria stationer. Konfigurationen är fyra fria stationer (ringar) och fem punkter (trianglar). Formel (11.11) ger $k = 0,52$ i plan och Formel (11.12) ger $k = 0,60$ i höjd.

Instrumentet på en av dessa används som utgångspunkt för ett *fritt, kartesiskt 3D-system* som kan beskrivas på följande sätt:

- origo utgörs av skärningen mellan totalstationens horisontal- och vertikalaxel
- orienteringen i tre dimensioner ges av lodlinjen genom instrumentet (zenitvinkel = 0) samt det horisontalplan som definieras av zenitvinkeln 100 gon. Horisontalskalans nollriktning definierar den ena axeln i detta plan och horisontalriktningen 100 gon den andra.
- skalan definieras av totalstationens längdmätare.

Från utgångspunkten mäts de markerade punkterna in polärt, dvs. mätning av vertikalvinkel samt riktning och längd mot varje punkt. Det ger 3D-koordinater på punkterna men inga överbestämningar. Sedan flyttas instrumentet ett stycke och proceduren upprepas. Några av mätningarna går åt för att bestämma den nya punkten men resten blir överbestämningar. Ny flytt, fler överbestämningar ... osv. Om vi delar upp nätet i ett *höjdnät* och ett *plant nät* gäller följande formler för relationen mellan antalet markerade punkter, antalet fria mätstationer och k -talen i plan respektive höjd.

Kontrollerbarheten i plan vid fri utjämning (se Tabell 11.b) blir:

$$k = \frac{(s-1)(2p-3)}{2 \cdot s \cdot p} \quad (11.11)$$

Kontrollerbarheten i höjd vid fri utjämning (se Tabell 11.c) blir:

$$k = \frac{(s-1)(p-1)}{s \cdot p} \quad (11.12)$$

Tabell 11.b. Kontrollerbarheten (k -tal enligt Formel 11.11) i **plan** för ett fristationsnät med p st punkter, inmätta från s st fria stationer.

s \ p	3	4	5	6	7	8	20
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,25	0,31	0,35	0,37	0,39	0,41	0,46
3	0,33	0,42	0,47	0,50	0,52	0,54	0,62
4	0,37	0,47	0,52	0,56	0,59	0,61	0,69
5	0,40	0,50	0,56	0,60	0,63	0,65	0,74
6	0,42	0,52	0,58	0,62	0,65	0,68	0,77
7	0,43	0,54	0,60	0,64	0,67	0,70	0,79
20	0,48	0,59	0,66	0,71	0,75	0,77	0,88

Slutsats: Minst 3 stationer och minst 4 punkter, men inte exakt dessa antal samtidigt. **Gröna** rutor är kombinationer med $k \geq 0,5$.

Tabell 11.c. Kontrollerbarheten (k -tal enligt Formel 11.12) i **höjd** för ett fristationsnät med p st punkter, inmätta från s st fria stationer.

$s \backslash p$	2	3	4	5	6	7	20
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0,25	0,33	0,37	0,40	0,42	0,43	0,48
3	0,33	0,44	0,50	0,53	0,56	0,57	0,63
4	0,37	0,50	0,56	0,60	0,62	0,64	0,71
5	0,40	0,53	0,60	0,64	0,67	0,69	0,76
6	0,42	0,56	0,62	0,67	0,69	0,71	0,79
7	0,43	0,57	0,64	0,69	0,71	0,73	0,81
20	0,48	0,63	0,71	0,76	0,79	0,81	0,90

Slutsats: Minst 3 stationer, minst 3 punkter, men inte samtidigt. **Gröna** rutor är kombinationer med $k \geq 0,5$.

Fristationsnät är ofta lokala, men om nätet ska anslutas till ett befintligt referenssystem måste naturligtvis någon eller några "vanliga" stompunkter - i plan och/eller höjd - inkluderas.

Det sker lämpligen genom att dessa mäts in polärt från flera stationer. Anslutningen till det referenssystem de representerar görs sedan med hjälp av inpassning i plan och höjd, för att inte riskera att fristationsnätet deformeras.

Trots att markeringarna är fasta så är det vid beräkningen nödvändigt att ta med en liten centreringsosäkerhet för att riktningsvikterna ska bli realistiska - enligt diskussionen i anslutning till Tabell 4.c.

Det är utan vidare möjligt att etablera fristationsnät som har en lokal lägesosäkerhet på millimeternivå (Persson, 1986b), oavsett hur osäkerheten mäts. Det mått som ter sig mest användbart är dock även här standardosäkerheten i utjämnade avstånd.

Men, om beräkningsprogrammet så tillåter, är det avstånden mellan de **markerade** punkterna som är mest intressanta att studera; där det inte finns några mätningar! Dessa standardosäkerheter är ett bra komplement till analysen av tillförlitligheten, som naturligtvis måste ske mellan punkter där det finns fysiska mätningar.

Inmätningen av ett fristationsnät har ju stora likheter med RTK-mätning mot fasta referensstationer, en metod som nyss blev förklarad olämplig som stommättningsmetod. Vad är då skillnaden?

- I ett fristationsnät mäter man **mot** punkterna som ska bestämmas. Mellan dessa nypunkter är sambandet säkerställt via mätningarna från de centralt placerade stationerna.

- RTK-mätning däremot utförs **från** de punkter som ska bestämmas. Mellan dessa finns inte på samma sätt ett säkert internt samband, trots att de vanligen ligger nära varandra och långt från referensstationerna.

En utvidgning av fristationsnät är nät där även stationspunkterna har ett välbestämt inbördes läge. De kan t.ex. vara markerade (tvångscenterade) med fasta konsoler och placerade så nära varandra att avstånden mellan dem kan mätas "felfritt". Men då pratar vi specialmätning!

Sammanfattande visdomsord

Kontrollerbarheten är vanligen låg i tågformade stomnät, vilket försvårar detektering och lokalisering av grova fel.

RTK-mätning mot fasta referensstationer är en användbar tillämpning, men det är INTE en metod för att etablera stomnät! Men rätt använd är GNSS framtidens stomnätningsteknik.

För lokala nät är terrestra fristationsnät i 3D ett mycket användbart komplement, med en extremt liten lokal lägesosäkerhet.



12 Referenser

Andersson, B Engberg, L E Persson, C-G Sundstrand, G	1986	<i>Plana stornät – checklista för planering och genomförande av stommättningsprojekt.</i> LMV-rapport 1986:9.
Baarda, W	1968	<i>A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks.</i> Netherlands Geodetic Commission, Vol. 2 No 5.
Bjerhammar, A	1958	<i>Felteori.</i> KTH, Stockholm.
Engberg, L E & Persson, C-G	2010	<i>God mätsed eller "Hur man utnyttjar tidigare generationers samlade erfarenheter".</i> SKMF:s tidskrift SINUS, 2010:1.
Lithén, T & Persson, C-G	1991	<i>Planering av GPS-nät.</i> LMV-rapport 1991:8.
Jivall, L & Persson, C-G	1993	<i>HMK-Geodesi: GPS.</i> Gävle.
Nyberg, J-O & Persson, C-G	1976	<i>Om utjämning av polygontåg och polygonnät.</i> Examensarbete, KTH, Stockholm.
Persson, C-G	1981	<i>On Weight-Estimation and Detection of Outliers within the Adjustment of Horizontal Control Nets.</i> Del av doktorsavhandling, KTH, Stockholm.
Persson, C-G	1982	<i>Utjämning, analys och optimering av triangelnät.</i> NKG, Gävle.
Persson, C-G	1986a	<i>SUKK – a Computer Program for Graphic Presentation of Precision and Reliability of Horizontal Geodetic Networks.</i> LMV-rapport 1986:1 och Invited paper, XVIII FIG Congress, Toronto.
Persson, C-G	1986b	<i>Swedish Experience of Wall-Mounted Targets.</i> LMV-rapport 1986:2 och Invited paper, XVIII FIG Congress, Toronto.
Persson, C-G	1986c	<i>Modern stommätning.</i> LMV-rapport 1986:18.
Persson, C-G (projektledare)	1993	<i>HMK-Geodesi: Stommätning.</i> Gävle.
Persson, C-G	2010	<i>GUM, en guide för att uttrycka mätosäkerhet.</i> SKMF:s tidskrift SINUS, 2010:1.
Persson, C-G	2016	<i>Standardosäkerheter, konfidensintervall m.m. vid positionsbestämning i 1D, 2D och 3D.</i> HMK – Teknisk rapport 2016:2.

Nuvarande version av GUM-dokumentet [JCGM 100:2008](#) förvaltas av konsortiet *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM).

A Ordlista

Förteckning över vissa termer rörande utjämning, felsökning och statistisk analys.

Svensk term	Engelsk term	Definition
<i>absolut lägesosäkerhet</i>	<i>absolute positional uncertainty</i>	osäkerhet i förhållande till ett globalt anpassat referenssystem; jfr. <i>lokal lägesosäkerhet</i>
<i>beslutsfel av andra slaget</i>	<i>consumer risk (Type II error)</i>	risken att en felaktig leverans blir godkänd; jfr. <i>beslutsfel av första slaget</i>
<i>beslutsfel av första slaget</i>	<i>producer risk (Typ I error)</i>	risken att en korrekt leverans blir underkänd; jfr. <i>beslutsfel av andra slaget</i>
<i>data-snooping</i>	<i>data-snooping</i>	statistisk metod för sökning efter <i>grova fel</i>
<i>fast utjämning</i>	<i>fixed adjustment</i>	<i>utjämning</i> med yttre tvång från tidigare lägesbestämda (fasta) stompunkter; jfr. <i>fri utjämning</i>
<i>fel</i>	<i>error</i>	skillnaden mellan en mätt storhet och dess "sanna" värde
<i>felellips</i>	<i>error ellipse</i>	se <i>osäkerhetsellips</i>
<i>fri utjämning</i>	<i>free adjustment</i>	<i>utjämning</i> utan yttre tvång från fasta stompunkter; jfr. <i>fast utjämning</i>
<i>frihetsgrader</i>	<i>degrees of freedom</i>	synonym till <i>överbestämningar</i>
<i>förbättring</i>	<i>residual</i>	korrektion till ett mätvärde som har bestämts i en <i>utjämning</i> enligt <i>minsta-kvadratmetoden</i> ; synonym: <i>residual</i>
<i>groot fel</i>	<i>gross error, blunder, outlier</i>	(i HMK): avvikelse större än 3 gånger <i>standardosäkerheten</i> ; se <i>slumpmässig avvikelse</i> och <i>systematisk avvikelse/effekt</i>
<i>grundmedelfel</i>	<i>standard error of unit weight</i>	äldre term som motsvarar <i>viktenhetens standardosäkerhet</i> enligt GUM

<i>inre tillförlitlighet</i>	<i>internal reliability</i>	(inom geodesi): möjligheten att hitta <i>grova fel</i> med <i>data-snooping</i> i en uppsättning mätdata, se MUF; jfr. <i>yttre tillförlitlighet</i>
<i>konfidensintervall</i>	<i>confidence interval</i>	intervall som anger osäkerheten i en skattning med en given sannolikhet: <i>täckningsgraden</i> (eller <i>konfidensnivån</i>)
<i>konfidensnivå</i>	<i>level of confidence</i>	synonymt med <i>täckningsgrad</i>
<i>kontrollerbarhet</i>	<i>controllability</i>	(inom geodesi): <i>kvalitativ</i> term för möjligheten att kontrollera <i>grova fel</i> i en <i>utjämning</i> ; ung. synonymt med <i>tillförlitlighet</i>
<i>korrelation</i>	<i>correlation</i>	<i>mått</i> som anger graden av samvariation mellan två variabler, t.ex. mätningar
<i>k-tal</i>	-	<i>mått</i> på <i>kontrollerbarhet</i>
<i>kvalitativ</i>	<i>qualitative</i>	allmän beskrivning av beskaffenhet/egenskap; jfr. <i>kvantitativ</i>
<i>kvantitativ</i>	<i>quantitative</i>	beskrivning av beskaffenhet-/egenskap uttryckt med ett <i>mått</i> , dvs. med siffror; jfr. <i>kvalitativ</i>
<i>lokal lägesosäkerhet</i>	<i>local positional uncertainty</i>	osäkerheten i förhållande till omgivande företeelser, t.ex. anläggningar, fastighetsgränser eller lokala referenssystem; jfr. <i>absolut lägesosäkerhet</i>
<i>lägesosäkerhet</i>	<i>positional uncertainty</i>	osäkerhet i positionsangivelse; se även <i>absolut lägesosäkerhet</i> och <i>lokal lägesosäkerhet</i>
<i>medelfel</i>	<i>mean error, standard error</i>	äldre term som motsvarar <i>standardosäkerhet</i> enligt GUM
<i>minsta upptäckbara fel, MUF</i>	<i>Marginally Detectable Error, MDE</i>	minsta grova fel som kan upptäckas med <i>data-snooping</i> , under vissa givna sannolikhetsvillkor
<i>minsta-koadratmetoden</i>	<i>method of least squares</i>	metod som används vid <i>utjämning</i> av geodetiska nät

<i>mått</i>	<i>measure</i>	väldefinierad matematisk storhet för mätning av beskaftenhet-/egenskap, t.ex. kvalitet
<i>mätosäkerhet</i>	<i>uncertainty in measurement, measurement uncertainty</i>	(enligt GUM): en parameter "som är förbunden med mätresultatet och som kännetecknar spridningen av värden som rimligen kan tillskrivas mätstorheten"; mäts vanligen med <i>standardosäkerhet</i>
<i>noggrannhet</i>	<i>accuracy</i>	(vid mätning): skillnaden mellan mätresultatet och dess "sanna" värde; jfr. <i>mätosäkerhet</i>
<i>osäkerhetsellips</i>	<i>uncertainty ellipse</i>	approximation av en <i>standardosäkerhetskurva</i> med en ellips (benämndes tidigare <i>felellips</i>)
<i>punktmedelfel</i>	<i>horizontal standard error</i>	äldre benämning, se <i>standardosäkerhet i plan</i>
<i>residual</i>	<i>residual</i>	synonym till <i>förbättring</i>
<i>sigma, σ</i>	<i>sigma</i>	vanlig beteckning för <i>standardosäkerhet</i> (tidigare <i>medelfel</i>)
<i>simulering</i>	<i>simulation</i>	att återskapa verkligheten med en modell i en kontrollerad miljö ("beräkning utan data")
<i>slinga</i>	<i>loop</i>	en sekvens av mätningar med gemensam start- och slutpunkt
<i>slumpmässig avvikelse</i>	<i>random deviation</i>	GUM-anpassad term för det som tidigare benämndes slumpmässigt <i>fel</i> och som vanligen följer normalfördelningen; jfr. <i>systematisk avvikelse/effekt</i>
<i>slutningsfel</i>	<i>(loop) misclosure</i>	avvikelse mellan mätresultat och kända utgångsvärden, t.ex. i en <i>slinga (loop)</i>
<i>standardiserad förbättring</i>	<i>standardized residual</i>	<i>förbättring</i> dividerad med sin egen <i>standardosäkerhet</i> ; används vid sökning efter <i>grova fel</i> med <i>data-snooping</i>
<i>standardosäkerhet</i>	<i>standard uncertainty</i>	statistiskt spridningsmått som används i HMK (och GUM) i

		stället för det äldre <i>medelfel</i> , t.ex. som mått på <i>mätosäkerhet</i> och <i>lägesosäkerhet</i>
<i>standardosäkerhet i utjämnat avstånd</i>	<i>standard uncertainty in adjusted distance</i>	ett mått på <i>lokal lägesosäkerhet</i>
<i>standardosäkerhetskurva</i>	<i>standard uncertainty curve</i>	grafisk redovisning i 2D av en positions <i>standardosäkerhet</i> i olika riktningar; brukar approximeras med en <i>osäkerhetsellips</i>
<i>stommätning</i>	<i>(geodetic) control surveying</i>	geodetisk mätning i syfte att etablera eller kontrollera <i>stompunkter</i> och <i>stomnät</i>
<i>stomnät</i>	<i>(geodetic) control network</i>	sammanhängande nät av <i>stompunkter</i> , lägesbestämda med geodetisk mätning och <i>utjämnning</i>
<i>stompunkt</i>	<i>(geodetic) control point</i>	fysiskt markerad punkt i ett <i>stomnät</i>
<i>systematisk avvikelse/effekt</i>	<i>systematic deviation/effect</i>	avvikelse/effekt som följer ett givet mönster och kan korrigeras; GUM-anpassad term för den äldre termen <i>systematiskt fel</i> ; jfr. <i>slumpmässig avvikelse</i>
<i>tillförlitlighet</i>	<i>reliability</i>	(inom geodesin): ung. synonymt med <i>kontrollerbarhet</i> ; se även <i>inre tillförlitlighet</i> och <i>yttre tillförlitlighet</i>
<i>tolerans</i>	<i>tolerance</i>	maximalt tillåten avvikelse
<i>täckningsfaktor</i>	<i>coverage factor</i>	T.ex. 1:an, 2:an och 3:an i 1 σ , 2 σ och 3 σ , alternativt 1,96 för 95-procentiga <i>konfidensintervall</i> vid normalfördelning
<i>täckningsgrad</i>	<i>level of confidence</i>	sannolikheten att ett <i>konfidensintervall</i> innehåller - "täcker" - en skattad storhet; synonymt med <i>konfidensnivå</i>
<i>utjämnning</i>	<i>adjustment</i>	beräkningsmetod för lägesbestämning där motsägelser mellan mätningarna minimeras enligt <i>minsta-kvadratmetoden</i>

<i>varians-kovariansmatris</i>	<i>variance covariance matrix</i>	kvadratisk matris som anger graden av variation och samvariation för statistiska storheter, t.ex. mätningar och koordinater
<i>vikt</i>	<i>weight</i>	den betydelse en mätning tillmäts i en <i>utjämning</i> enligt <i>minsta-kvadratmetoden</i>
<i>viktenhetens standardosäkerhet</i>	<i>standard uncertainty of unit weight</i>	<i>standardosäkerheten</i> för en mätning med <i>vikten</i> ett (1); benämndes tidigare grundmedelfel
<i>yttre tillförlitlighet, YT</i>	<i>external reliability</i>	(inom geodesin) mått på oupptäckta <i>grova fels</i> påverkan på resultatet av en <i>utjämning</i> ; jfr. <i>inre tillförlitlighet</i>
<i>överbestämningar</i>	<i>over determinations</i>	antalet mätningar utöver vad som krävs för att få ett resultat; synonymt med <i>frihetsgrader</i>

Förkortningar	
GNSS	<i>Global Navigation Satellite Systems</i> , t.ex <i>GPS</i> ; <i>Glonass</i> , <i>Galileo</i> m.fl. satellitbaserade navigations- och positioneringssystem.
GUM	<i>Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement</i> . Internationell kvalitetsstandard för mätning.
MUF	<i>Minsta upptäckbara fel</i> (Eng. <i>Marginally Detactable Error</i> , <i>MDE</i>). Mått på inre tillförlitlighet.
SWEPOS	Nationellt nät av fasta referensstationer för GNSS.
YT	<i>Yttre tillförlitlighet</i> (Eng. <i>External reliability</i>).

B Teknisk specifikation och dokumentation/redovisning

I denna bilaga redovisas exempel på vad en *teknisk specifikation* av ett stornätsprojekt bör innehålla och vad som bör ingå i dokumentationen/redovisningen av ett sådant projekt. Syftet är inte detaljbeskrivning av dessa moment utan snarare att ge ett **underlag** för att ta fram motsvarande formella dokument.

Specifikationen och dokumentationen bör vara desamma oavsett om det är ett uppdrag från en beställare till en utförare eller ett internt "in house-projekt". Användarna av stornätet behöver få samma information oavsett hur nätet en gång har tagits fram.

Teknisk specifikation – exempel på övergripande krav

Stornätet ska utformas som ett triangelnät anslutet till referenssystemet SWEREF 99 12 00.

Nätet ska vara homogent, med enhetlig punkttäthet och ungefär samma avstånd mellan stompunkterna (ca. 1 km). Extrapolation – utanför utgångspunkterna – ska undvikas.

Standardosäkerheten i utjämnade avstånd är det viktigaste måttet på lägesosäkerheten. Standardosäkerheten i plan är av mindre betydelse men osäkerhetsellipserna ska vara nära cirkulära.

Nätutformning och mätprogram ska analyseras och godkännas innan mätningen påbörjas. Om ett särskilt simuleringsprogram används ska det redovisa både lägesosäkerheten och kontrollerbarheten/tillförlitligheten i nätet. För nätet tillämpas den generella principen att de individuella k-talen, för samtliga mätningar, ska vara $\geq 0,5$. Ur k-talen beräknas den inre tillförlitligheten (MUF) och den yttre tillförlitligheten (YT).

Mätutrustningen ska vara kontrollerad, kalibrerad och justerad. För klassificering av totalstationer tillämpas SIS-TS 21143:2016. Mätningarna planeras så att balans råder mellan riktnings- och längdmätningarnas osäkerhet och centreringsosäkerheten ska beaktas.

Fältkontroll av grova fel ska utföras, i direkt anslutning till mätningen, genom jämförelse av riktningsmätning i helsatser och dubbelmätning av längder. Mätta längder ska höjd- och projektionskorrigeras innan de går vidare till beräkning.

Beräkningen ska utföras i en sekvens bestående av

- fri utjämning*
- inpassning (unitär transformation + Helmert-transformation)*
- fast utjämning.*

Kontroll av grova mätfel ska göras efter den fria utjämnningen, analys av utgångspunkter och ev. skalskillnad efter inpassningsberäkningen och upprepad grovfelssökning i den fasta utjämnningen. Dessutom ska viktenhetens standardosäkerhet analyseras i samtliga beräkningar.

Data-snooping ska användas för sökningen av grova fel. Uteslutning av mätningar – och ev. utgångspunkter – ska dokumenteras och om möjligt motiveras.

Denna trestegsanalys ska godkännas före den slutgiltiga beräkningen och slutredovisningen.

Exempel på detaljkrav/toleranser och hur dessa tas fram

(fortsättning på ovanstående exempel)

Genomsnittligt punktavstånd: 1 km (enligt den tekniska specifikationen)
SIS-klass på totalstationen: T3 (verkar rimligt enligt Tabell 4.a) dvs. 0,6 mgon i mätt riktning (1 helsats) och 2 mm + 3 ppm i mätt längd
Balans mellan längd- och riktningsmätning: 4 helsatser (n=4), A=0,6 mgon och C=2 mm i Formel (4.1) ger standardosäkerheten 0,33 mgon i riktning , dvs. 5,1 mm i tvärled på det genomsnittliga avståndet 1 km. A=2 mm , B=3 ppm och C=2 mm i Formel (4.2) ger standardosäkerheten 5,4 mm i längd på avståndet 1 km. Dessa parametrar ger alltså en ganska god balans.
Tolerans vid fältkontroll (riktningar): Tabell 4.d, alt. 2, ger 2 mgon som tolerans för spridningen mellan de fyra helsatserna
Tolerans vid fältkontroll (längder): Formel (4.3) ger $2,8 \cdot 5,4 = 15,1 \approx 15$ mm som tolerans för skillnaden mellan dubbelmätta avstånd
Krav på k-tal: $k \geq 0,5$ (enligt den tekniska specifikationen)
Standardosäkerheten $u(l_i + v_i)$ i utjämnade avstånd: Formel (6.8) ger (med $k = 0,5$): $u(l_i + v_i) = u(l_i)\sqrt{1 - 0,5} = \sqrt{0,5} \cdot u(l_i)$, dvs. $u(l_i + v_i) = \sqrt{0,5} \cdot 5,4 = 3,8 \approx 4$ mm som alltså kan betraktas som ett mått på den lokala lägesosäkerheten i plan – och ev. användas som tumregel för kontroll av viktenhetens standardosäkerhet vid inpassning av en fri utjämnning enligt Formel (8.3).

Inre tillförlitlighet:

Formel (6.6) ger (med $k = 0,5$): $MUF = \frac{2,8}{\sqrt{0,5}} \cdot u(l_i)$, dvs.

$$MUF = \frac{2,8}{\sqrt{0,5}} \cdot 0,33 = \mathbf{1,3 \text{ mgon}}$$
 för riktningar (20 mm på 1km)

$$MUF = \frac{2,8}{\sqrt{0,5}} \cdot 5,4 = \mathbf{21 \text{ mm}}$$
 för avstånd

Yttre tillförlitlighet:

Formel (6.7) ger (med $k = 0,5$): $YT = (1 - 0,5) \cdot MUF = 0,5 \cdot MUF$

$$YT = 0,5 \cdot 1,3 = \mathbf{0,65 \text{ mgon}}$$
 för riktningar (10 mm på 1km)

$$YT = 0,5 \cdot 21 = \mathbf{11 \text{ mm}}$$
 för avstånd

Innehåll i en stomnätsredogörelse

Stomnätsredogörelsen - produktionsdokumentationen från ett stomnätsmättningsprojekt - bör redovisa följande:

- a) uppdraget (typ av stomnät, tänkt användning, kvalitetskrav, kompetenskrav, leveransvillkor enligt tekniska specifikationen)
- b) uppdragsorganisation, dvs. beställare och utförare (projektansvarig, underleverantörer etc.)
- c) förteckning över levererat material, innehåll och format.
- d) rapport, i PDF/A-format om inte annat anges, som redovisar:
 - höjd- och koordinatsystem, kartprojektion och zon samt geoidmodell och ev. transformations samband
 - mätmetoder och mätutrustning (fabrikat/typ/nr samt verifikat på kalibreringar/justeringar)
 - kontrollmetoder och toleranser
 - programvara för beräkning
 - egenkontroller vid mätning och beräkning
 - särskilda överväganden och ställningstaganden (t.ex. vid underhandsavstämningar)
 - information om arkiverade data (t.ex. rådata från mätningar)
 - beskrivning av levererade digitala data (dataformat, lagringsmedium etc.).
- e) resultatrapport (se nedan):
 - utskrifter av beräkningsresultat samt underlag för och resultatet av de kontroller som gjorts av mätosäkerhet, kontrollerbarhet/tillförlitlighet etc.
- f) nätkarta som visar:
 - utgångspunkter och nypunkter
 - utförda mätningar
 - ev. icke använda/bortviktade mätningar, som i så fall anges i avvikande manér.

- g) punktdokumentation:
- beskrivning av ev. återfinningsmärken och punktbeskrivningar
- h) datafiler avseende:
- indata med alla observationer och deras standardosäkerhet (viktning)
- övriga parametrar som använts vid beräkningen
- utdata från beräkningsprogrammet.

Resultatrapport från beräkning/analys

Resultatrapporten från beräkningen är en viktig del av stomnätsredogörelsen. Den bör därför kunna användas direkt som en bilaga. I resultatrapporten ska det vara enkelt att hitta resultat och följa beräkningsgången. Rapporten ska även innehålla information om den använda programvaran.

Följande punkter är en sammanfattning av vilka storheter som normalt ska kontrolleras och redovisas i samband med fast och fri utjämning av triangelnät:

- nätets k -tal
- förbättringar
- viktenhetens standardosäkerhet
- standardosäkerhet i plan och osäkerhetsellipser
- standardosäkerhet i utjämnade avstånd (lokal lägesosäkerhet)
- individuella k -tal
- standardiserade förbättringar och data-snooping
- inre och yttre tillförlitlighet

samt motsvarande storheter från transformationer/inpassningar.

Borttagna mätningar och punkter ska redovisas, och helst även orsaken till borttagandet. Detsamma gäller utgångspunkter som tagits bort – och eventuellt nybestämts inom ramen för det aktuella stomnätsprojektet.

Stora skillnader mellan den fria och den fasta utjämningen – som inte kan förklaras enbart av skillnaden i antalet frihetsgrader – bör också kommenteras.

Ett exempel kan vara att betydligt fler mätningar flaggas i data-snooping i den fasta utjämningen än i den fria. Det indikerar att det finns motsägelser mellan utgångspunkterna och mätningarna, som inte har kunnat upptäckas i koordinattransformationen.

Delar av rapporten består vanligen av utskrifter direkt från beräkningsprogram.

Utskrifter från beräkningsprogram

Användarmanualen för den programvara som används innehåller förklaringar av de kvalitetsmått som ingår i resultatredovisningen. För förståelse av dessa är det viktigt att noga läsa manualen. Vad som redovisas i olika programvaror kan variera något – liksom hur de benämns i originalspråket och i olika översättningar till svenska, som inte alltid är helt fackmannamässiga.

Nedan ges två exempel på resultatutskrifter från programmet *Geo* från *SBG*, som följer (gamla) HMK mycket väl.

Tabell B.1. Utskrift 1 från programmet *Geo* från *SBG*.

Horisontell nätutjämnning			
Nätutjämningsfil:	C:\pdoc\lovn96\tyz\lovn.hna		
Beräkning:	Utjämnning	Metod:	Absolut anslutning
Antal observationer:	66	Kontrollerbarhet:	0,73
Antal obekanta:	18	Min tillåtna (HMK):	0,50
Redundans:	48	Grundmedelfel:	1,04
		Max tillåtna (HMK):	1,17
Apriorifel			
<i>(Notera: Dessa är de senast använda standardinställningarna, värden kan skilja vid enskilda mätningar)</i>			
Riktningar:	0,0008	Antal helsatser:	1
Orienterade riktningar:	0,0020	Antal helsatser:	1
Längder:	0,0050 + 3,0000 ppm	Koordinater:	0,0200
Centrering:	0,0030	Koordinatdifferenser:	0,0050

Ur utskrift 1 i Tabell B.1 kan bl.a. utläsas att *redundansen* (antalet frihetsgrader) är beräknad till 48. *k-talet* är 0,73 vilket jämförs med HMK:s tolerans $k \geq 0,50$. Grundmedelfelet (*viktenhetens standardosäkerhet*) är 1,04 som jämförs med HMK:s tolerans 1,17 (för 48 frihetsgrader, enligt Formel 5.6).

Vikter har beräknats ur apriorimedelfel (*standardosäkerheter*) enligt följande:

- **längder**, Formel (4.1): $A = 5$ mm, $B = 3$ ppm, $C = 3$ mm.
- **riktningar**, Formel (4.2): $A = 0,8$ mgon, $n = 1$ (en helsats), $C = 3$ mm.

Tabell B.2. Utskrift 2 från programmet *Geo* från *SBG*.

Max residual:	0,0018	Från punkt	179	Till punkt	638
Max std residual:	2,387		179		638
Antal stationer:	7				
Antal riktningar:	32				
Typ	Från punkt	Värde	Residual	Utj.riktning	Std Residual
	Till punkt	Apr medelfel	Utj medelfel	Orienterad riktn	Kontrollerbarhet
			MUF	YT	
Riktning	179	323,1188	-0,0001	323,1187	-0,190
	540	0,0008	0,0005	95,9774	?? 0,691
			0,0027	0,0008	
Riktning	179	0,0000	?? 0,0017	0,0017	?? 2,376
	649	0,0008	0,0007	172,8603	?? 0,534
			0,0031	0,0014	

Ur utskrift 2 i Tabell B.2 kan bl.a. utläsas att den största residualen (*förbättringen*) avser riktningen från punkt 179 till punkt 638. Den har även den största *standardiserade residualen*, 2,387.

Även andra riktningsmätningar från punkt 179 verkar ha varit problematiska. T.ex. har riktningen mot punkt 649 en *residual* på 0,0017 gon och en *standardiserad residual* på 2,376, dvs. klart > 2 och därför flaggad (med ??).

Den mätningen har *k-talet* 0,534, vilket tydligen anses vara för litet (för nära 0,5 måhända) eftersom även den siffran är flaggad. *MUF* anges till 0,0031 gon och $YT = (1 - 0,534) \cdot 0,0031 = 0,0014$ gon, enligt Formel (6.7.a).

C God mätsed

God mätsed (Engberg & Persson, 2010) är inte knuten till någon viss mätmetod eller mätutrustning utan avser "sanningar" som är mer eller mindre allmängiltiga.

- Mätningen ska ge såväl ett produktionsresultat som en deklARATION av mätosäkerheten. Båda delarna är lika viktiga och måste få ta tid.
- Ett mål är att eliminera de grova felen samt att reducera de systematiska och slumpmässiga avvikelserna.
- Kontrollera: en mätning är ingen mätning! Överbestämningar görs i första hand för att hitta grova fel.
- A och O är ordning och reda, från början till slut. Det är svårt att i efterhand skapa ordning ur kaos.
- Dokumentera även för dig själv, du glömmet fortare än du tror. Märk upp de handlingar som ingår i uppdraget men städa successivt bort sådant som inte ska sparas. Skriv dagbok i mer omfattande projekt.
- En del i detta är spårbarhet. Det ska vara möjligt att gå bakåt i en hanteringskedja – vid flera transformationer i sekvens, om olika geoidmodeller har använts etc.
- Tillämpa beprövade och etablerade metoder. Därigenom utnyttjar du andras erfarenheter och andra förstår hur du har gjort. De kan då kontrollera ditt resultat – alternativt utnyttja det i sin tur – eftersom de kan bedöma dess användbarhet.
- Skaffa dig kunskap om den teknik, den utrustning och de metoder Du använder – dels för att kunna utföra mätningarna på rätt sätt, dels för att förstå varför när något går fel.
- I det ingår insikt om förekommande felkällor och de metoder som finns för att reducera deras inverkan på mätresultatet. Ingen kedja är starkare än sin svagaste länk.
- Sätt dig även in i den tillämpning varifrån beställningen av ditt mätuppdrag kommer så att du kan anpassa kvaliteten på utförandet. För låg mätosäkerhet är naturligtvis inte acceptabelt, men även "överkvalitet" bör normalt undvikas.
- Tänk efter före, dvs. planera processen i förväg. Mätuppdrag är till stor del ett logistikproblem och god planering ger vinster i såväl tid och pengar som kvalitet.