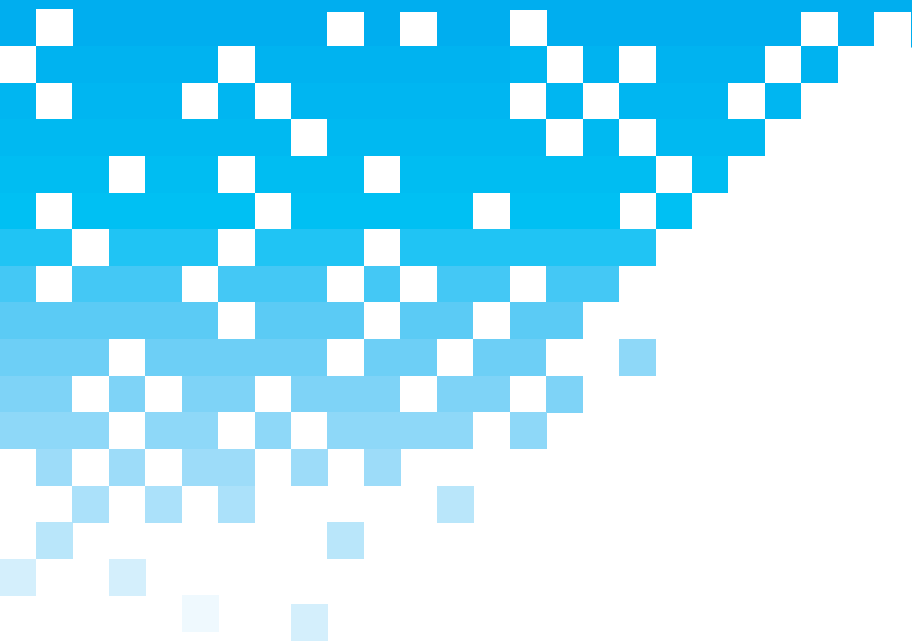


Teknisk rapport 2016:2

Standardosäkerheter, konfidensintervall m.m. vid positionsbestäm- ning i 1D, 2D och 3D

Clas-Göran Persson



Författarens kontaktuppgifter

Clas-Göran Persson

Lantmäteriet

SE - 801 82 Gävle

clas-goran.persson@lm.se

+46-70-557 6037

eller

Skansstigen 3 C

SE - 832 51 Frösön

clasgoran.persson@gmail.com

+46-70-669 1950

Förord

Serien "Tekniska rapporter" är ett komplement till övriga HMK-dokument. Här redovisas bakgrundsinformation, detaljbeskrivningar, analyser m.m. som inte passar in i en handbokstext.

Ett syfte är att säkerställa - och visa - att handböckerna ligger i linje med metod- och teknikutvecklingen samt med de krav och riktlinjer som finns i branschen i övrigt - nationellt och internationellt. Ett annat att tydliggöra att det finns en robust teoribildning som grund.

Denna rapport har utarbetats av undertecknad. Författaren vill tacka Milan Horemuz, KTH, för värdefulla underhandssynpunkter samt för granskning av slutrapporten.

Östersund, oktober 2016

/Clas-Göran Persson, Lantmäteriet

[Samlade förord](#)

Innehållsförteckning

1	Inledning.....	5
1.1	Bakgrund och syfte	5
1.2	Terminologi och beteckningar	5
1.3	Disposition	6
2	Standardosäkerheten i avstånd och vid återbesök	7
2.1	Elementa om några statistiska fördelningar	7
2.2	Täckningsfaktorer för konfidensintervall och statistiska test.....	8
2.3	Standardosäkerheten i ett avstånd	10
2.4	Standardosäkerheten vid återbesök	12
2.5	Avstånd vs. återbesök	13
3	Hantering av asymmetri och korrelation	15
3.1	Väntevärde och varians för kvadratiska former av stokastiska variabler	15
3.2	Korrektion för asymmetri och korrelation	16
4	Sammanfattning.....	20
5	Referenser.....	22
6	Epilog	23
A	Standardosäkerheten i ett avstånd och vid återbesök – en simuleringsstudie.....	24

1 Inledning

1.1 Bakgrund och syfte

Det primära med denna rapport är att visa att hanteringen av *lägesosäkerhet* i HMK vilar på en stabil teoretisk grundval och på beprövade statistiska metoder. Endast elementära statistikkunskaper krävs för att förstå problemformuleringarna och resultatet, men djupare insikter behövs för att förstå alla detaljer.

1.2 Terminologi och beteckningar

I huvudsak används GUM:s terminologi beträffande *mätosäkerhet*, se *HMK – Ordlista och förkortningar*, juni 2015, kapitel 1 och 2. Av "historiska" skäl använder vi dock beteckningen σ för att beteckna *standardosäkerhet*, vilket avviker från GUM.

Denna och övriga beteckningar som används i formelapparaten är hämtade från statistik och matrisalgebra. De redovisas i Tabell 1.2.

Tabell 1.2. *Beteckningar.*

σ	standardosäkerhet
ξ, η	stokastiska variabler
$N(0,1)$	normalfördelning med väntevärdet 0 och standardosäkerheten 1
$\chi^2(f)$	χ^2 - fördelad stokastisk variabel med f frihetsgrader
ε	beteckning på avvikelse från "sant" värde ("fel")
1D, 2D, 3D	en, två respektive tre dimensioner
N, E	koordinater i 2D, Northing/Easting
X, Y, Z	kartesiska koordinater i 3D
$\Delta N, \Delta E \quad \Delta X, \Delta Y, \Delta Z$	koordinatdifferenser i 2D/3D
$P\{x < y\}$	sannolikheten att $x < y$
$E\{ \}$	väntevärde
$V\{ \}$	varians
$tr\{ \}$	spåret i en (kvadratisk) matris, dvs. summan av dess diagonalelement
Q_{ij}	element/submatriser i matrisen Q

1.3 Disposition

Rapporten disponeras på följande sätt:

- I Kapitel 2 påbörjas analysen med hjälp av elementär statistik. Fokus ligger på standardosäkerhet, täckningsfaktorer och konfidensintervall/toleranser. Även skillnaden mellan hanteringen av avstånd och återbesök beskrivs.
- I Kapitel 3 tar vi hjälp av litet mer avancerad statistikteori för att komma vidare. Huvudnumret där är korrektion för asymmetri och korrelation i mätdata.
- Rapportens resultat sammanfattas i Kapitel 4.
- I Kapitel 5 redovisas de viktigaste referenserna och epilogen i Kapitel 6 avslutar huvudtexten.
- En simuleringsstudie redovisas i Bilaga A, som komplement till de teoretiska härledningarna.

2 Standardosäkerheten i avstånd och vid återbesök

2.1 Elementa om några statistiska fördelningar

Om den stokastiska variabeln ξ är *normalfördelad* med väntevärdet noll och standardosäkerheten σ , dvs.

$$\xi \in N(0, \sigma) \quad (1)$$

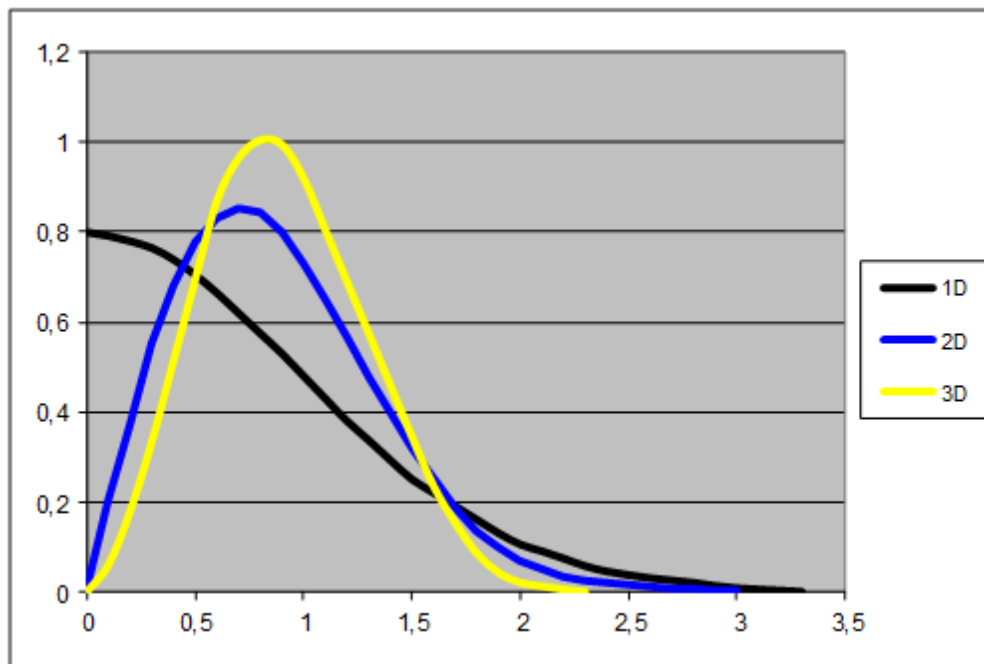
så gäller att den stokastiska variabeln

$$\eta = \frac{\xi}{\sigma} \in N(0, 1) \quad (2)$$

dvs. den följer en *normaliserad normalfördelning*. Det ger att

$$\eta_i^2 = \sum_{i=1}^f \eta_i^2 = \sum_{i=1}^f \frac{\xi_i^2}{\sigma_i^2} \in \chi^2(f) \quad (3)$$

där σ_i är standardosäkerheten för motsvarande variabel η_i . $\chi^2(f)$ är en *chi-2-fördelad* stokastisk variabel med f *frihetsgrader*. En sådan är alltså kvadratsumman av f st. $N(0,1)$ -fördelade variabler.



Figur 2.1. Frekvensfunktionerna till $\sqrt{\chi^2(f)/f}$ för $t = 1, 2$ och 3 , dvs. för 1, 2 och 3 dimensioner.

Av det följer att

$$\eta_f = \sqrt{\sum_{i=1}^f \frac{\xi_i^2}{\sigma_i^2}} \in \sqrt{\chi^2(f)} \quad (4)$$

χ^2 -fördelningarna för dimensionerna/frihetsgraderna 1, 2 och 3 redovisas i Figur 2.1. Som synes ser fördelningarna ganska olika ut, dvs. felen beter sig på litet olika sätt. Ett annat perspektiv på förhållandena dimension, standardosäkerhetsmultiplar och täckningsgrad (se nästa avsnitt) åskådliggörs i Tabell 2.1.

Tabell 2.1. Täckningsgraden för 1σ , 2σ och 3σ i 1, 2 och 3 dimensioner. 2σ återkommer vi särskilt till, se Tabell 3.2.b.

	$1\sigma_D$	$2\sigma_D$	$3\sigma_D$
1D	68,27%	95,45%	99,73%
2D	63,21%	98,17%	99,99%
3D	60,80%	99,30%	100 - ε %

2.2 Täckningsfaktorer för konfidensintervall och statistiska test

De absoluta/radiella felen vid positionsbestämning i 1D, 2D respektive 3D betecknas

$$\varepsilon_I = |\varepsilon| \quad (1D) \quad (5)$$

$$\varepsilon_{II} = \sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_E^2} \quad (2D) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{III} = \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2} \quad (3D) \quad (7)$$

Vilken fördelning har då dessa storheter om felen är normalfördelade och om $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ betecknar motsvarande standardosäkerheter?

I 1D-fallet får vi

$$\varepsilon_I = |\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon^2} = \frac{\sigma}{\sigma} \sqrt{\varepsilon^2} = \sigma \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2}} \in \sigma \sqrt{\chi^2(1)} = \sigma \sqrt{\frac{\chi^2(1)}{1}} \quad (8)$$

För 2D och 3D definierar vi

$$\sigma_{II} = \sqrt{\sigma_N^2 + \sigma_E^2} \quad (9)$$

respektive

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + \sigma_Z^2} \quad (10)$$

Om vi vidare antar att alla koordinatosäkerheter är lika, dvs. $\sigma_N = \sigma_E = \sigma_k$ respektive $\sigma_X = \sigma_Y = \sigma_Z = \sigma_k$ (där k står för *koordinat*), så övergår formlerna 9 och 10 i

$$\sigma_{II} = \sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_k^2} = \sqrt{2\sigma_k^2} = \sqrt{2} \cdot \sigma_k \quad (11)$$

och

$$\sigma_{III} = \sqrt{\sigma_k^2 + \sigma_k^2 + \sigma_k^2} = \sqrt{3\sigma_k^2} = \sqrt{3} \cdot \sigma_k \quad (12)$$

Det ger fördelningarna

$$\begin{aligned} \varepsilon_{II} &= \sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_E^2} = \frac{\sigma_{II}}{\sigma_{II}} \sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_E^2} = \frac{\sigma_{II}}{\sqrt{2} \cdot \sigma_k} \sqrt{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_E^2} = \\ &= \frac{\sigma_{II}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_N^2 + \varepsilon_E^2}{\sigma_k^2}} = \frac{\sigma_{II}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\varepsilon_N^2}{\sigma_k^2} + \frac{\varepsilon_E^2}{\sigma_k^2}} \in \frac{\sigma_{II}}{\sqrt{2}} \sqrt{\chi^2(2)} = \sigma_{II} \sqrt{\frac{\chi^2(2)}{2}} \end{aligned} \quad (13)$$

respektive

$$\begin{aligned} \varepsilon_{III} &= \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2} = \frac{\sigma_{III}}{\sigma_{III}} \sqrt{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2} = \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\varepsilon_X^2 + \varepsilon_Y^2 + \varepsilon_Z^2}{\sigma_k^2}} = \\ &= \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\varepsilon_X^2}{\sigma_k^2} + \frac{\varepsilon_Y^2}{\sigma_k^2} + \frac{\varepsilon_Z^2}{\sigma_k^2}} \in \frac{\sigma_{III}}{\sqrt{3}} \sqrt{\chi^2(3)} = \sigma_{III} \sqrt{\frac{\chi^2(3)}{3}} \end{aligned} \quad (14)$$

I Tabell 2.2.a redovisas konfidensintervall för de absoluta/radiella felen - uttryckta som multipel av motsvarande standardosäkerhet - för olika dimensioner. De gäller under vissa förutsättningar, som vi återkommer till.

Tabell 2.2.a Konfidensintervall för absoluta/radiella fel i 1D, 2D och 3D.
LEP = Linear Error Probable; CEP = Circular Error Probable; SEP = Spherical Error Probable.

Dimension	Frågeställning	P=50 %	P=95 %	P=99 %
1 D	$P\{\varepsilon_I \leq k_I \sigma_I\}$	$k_I = 0,67$ (LEP)	$k_I = 1,96$	$k_I = 2,57$
2 D	$P\{\varepsilon_{II} \leq k_{II} \sigma_{II}\}$	$k_{II} = 0,83$ (CEP)	$k_{II} = 1,73$	$k_{II} = 2,15$
3 D	$P\{\varepsilon_{III} \leq k_{III} \sigma_{III}\}$	$k_{III} = 0,89$ (SEP)	$k_{III} = 1,61$	$k_{III} = 1,94$

Enligt formlerna 8,13 och 14 beräknas k -värdena i tabellen – de s.k. täckningsfaktorerna – på följande sätt:

$$1D: k_I = \sqrt{\chi_\alpha^2(1)/1} \quad (15)$$

$$2D: k_{II} = \sqrt{\chi_\alpha^2(2)/2} \quad (16)$$

$$3D: k_{III} = \sqrt{\chi_\alpha^2(3)/3} \quad (17)$$

dvs. ur fördelningen $\sqrt{\chi^2(f)/f}$ där antalet frihetsgrader $f =$ dimensionen och $\alpha =$ risknivån. $1 - \alpha =$ täckningsgraden, dvs. sannolikheten P i Tabell 2.2.a. I Tabell 2.2.b. beräknas k -värdena för $\alpha = 5\%$.

Tabell 2.2.b. Beräkning av k -värden från χ^2 -tabell (95 % täckningsgrad.)

Antal frihetsgrader (f)	$\chi_{5\%}^2(f)$	$k = \sqrt{\chi_{5\%}^2(f)/f}$
1	3,841	$k_I = \sqrt{3,841/1} = 1,96$
2	5,991	$k_{II} = \sqrt{5,991/2} = 1,73$
3	7,815	$k_{III} = \sqrt{7,815/3} = 1,61$

2.3 Standardosäkerheten i ett avstånd

Låt oss nu närma oss rapportens "huvudnummer" genom att beräkna standardosäkerheten i ett avstånd i planet (2D). Först gör vi på traditionellt vis med hjälp av *fortplantningsformeln för mätosäkerhet*.

Vi skriver avståndet mellan A och B som

$$d_{AB} = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} = \sqrt{(\Delta N_{AB})^2 + (\Delta E_{AB})^2} \quad (18)$$

där (N_A, E_A) , (N_B, E_B) är ändpunkternas koordinater (Northing respektive Easting).

Följande derivator beräknas

$$\frac{\partial d_{AB}}{\partial N_A} = -\frac{(N_B - N_A)}{d_{AB}} = -\frac{\Delta N_{AB}}{d_{AB}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial d_{AB}}{\partial N_B} = \frac{(N_B - N_A)}{d_{AB}} = \frac{\Delta N_{AB}}{d_{AB}} \quad (20)$$

$$\frac{\partial d_{AB}}{\partial E_A} = -\frac{(E_B - E_A)}{d_{AB}} = -\frac{\Delta E_{AB}}{d_{AB}} \quad (21)$$

$$\frac{\partial d_{AB}}{\partial E_B} = \frac{(E_B - E_A)}{d_{AB}} = \frac{\Delta E_{AB}}{d_{AB}} \quad (22)$$

Om båda ändpunkterna har standardosäkerheten $\sigma_{II} = \sqrt{2} \cdot \sigma_k$ i plan - enligt Formel (11) - så kan avståndets standardosäkerhet beräknas via

$$\begin{aligned}
 \sigma_{d_{AB}}^2 &= \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial N_A}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial N_B}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial E_A}\right)^2 \sigma_k^2 + \left(\frac{\partial d_{AB}}{\partial E_B}\right)^2 \sigma_k^2 = \\
 &= \frac{\Delta N_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta N_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta E_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta E_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = \\
 &= \frac{\Delta N_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta E_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta N_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta E_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = \\
 &= \frac{d_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{d_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = 2 \frac{d_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = 2\sigma_k^2 = 2(\sigma_{II}^2 / 2) = \sigma_{II}^2
 \end{aligned} \tag{23}$$

Dvs. i 2D gäller för standardosäkerheten i ett avstånd att

$$\sigma_{d_{AB}} = \sigma_{II} \tag{24}$$

Man kan visa att motsvarande uttryck för standardosäkerheten i ett avstånd i tre dimensioner - med ändpunkterna (X_A, Y_A, Z_A) och (X_B, Y_B, Z_B) - blir

$$\begin{aligned}
 \sigma_{d_{AB}}^2 &= \frac{\Delta X_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta Y_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta Z_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta X_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta Y_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 + \frac{\Delta Z_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = \\
 &= 2 \frac{d_{AB}^2}{d_{AB}^2} \sigma_k^2 = 2\sigma_k^2 = 2(\sigma_{III}^2 / 3) = \frac{2}{3} \sigma_{III}^2
 \end{aligned} \tag{25}$$

eller

$$\sigma_{d_{AB}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{III} \tag{26}$$

eftersom $\sigma_{III} = \sqrt{3} \cdot \sigma_k$ enligt Formel (12).

En snabbare väg är att vrida koordinatsystemet så att en av axlarna sammanfaller med avståndsvektorn. Då är det bara osäkerheten i den koordinatdifferensen som påverkar osäkerheten i avståndet.

Om alla koordinatosäkerheter är lika så får vi alltså

$$\sigma_{d_{AB}} = E\{|\varepsilon_B - \varepsilon_A|\} = \sqrt{2} \sigma_k \tag{27}$$

i både 2D och 3D. Av det följer direkt Formel (24) och (26) med hjälp av Formel (11) respektive (12).

Vad gäller då vid återbesök, dvs. om avståndet $d_{AB} = 0$? Gäller samma formler då? Nej det gör de inte. Där får vi söka andra vägar.

2.4 Standardosäkerheten vid återbesök

Återbesök definieras som upprepade mätningar på samma punkt – vanligen med ett tidsmellanrum för att t.ex. minska risken för (tids)korrelation. Det vi mer precist söker är standardosäkerheten för skillnaden mellan ursprunglig mätning och ett återbesök på samma punkt vid ett senare tillfälle.

Ett återbesök vid 2-dimensionell positionsbestämning – t.ex. GNSS-mätning – ger *feldifferensvektorn*

$$\bar{\varepsilon}_{\Delta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{N1} \\ \varepsilon_{E1} \\ \varepsilon_{N2} \\ \varepsilon_{E2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{N1} - \varepsilon_{N2} \\ \varepsilon_{E1} - \varepsilon_{E2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

där $\bar{\varepsilon}_1^T = [\varepsilon_{N1} \quad \varepsilon_{E1}]$ är felen i den första positionsbestämningen och $\bar{\varepsilon}_2^T = [\varepsilon_{N2} \quad \varepsilon_{E2}]$ är felen i den andra.

Med hjälp av denna vektor kan den sökta standardosäkerheten för positionsskillnaden vid återbesök i 2D ($\sigma_{\Delta 2D}$) beräknas. Den fås ur

$$\begin{aligned} E\{\bar{\varepsilon}_{\Delta}^T \bar{\varepsilon}_{\Delta}\} &= E\{(\varepsilon_{N1} - \varepsilon_{N2})^2 + (\varepsilon_{E1} - \varepsilon_{E2})^2\} = \\ &= E\{\varepsilon_{N1}^2 + \varepsilon_{N2}^2 - 2\varepsilon_{N1}\varepsilon_{N2} + \varepsilon_{E1}^2 + \varepsilon_{E2}^2 - 2\varepsilon_{E1}\varepsilon_{E2}\} = [\text{okorr.mätn.}] = \\ &= E\{\varepsilon_{N1}^2 + \varepsilon_{N2}^2 + \varepsilon_{E1}^2 + \varepsilon_{E2}^2\} = \sigma_{N1}^2 + \sigma_{N2}^2 + \sigma_{E1}^2 + \sigma_{E2}^2 = 4\sigma_k^2 = 2\sigma_{II}^2 \end{aligned} \quad (29)$$

dvs.

$$\sigma_{\Delta 2D} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{II} \quad (30)$$

Vid ett återbesök vid 3-dimensionell positionsbestämning får vi på motsvarande sätt:

$$\bar{\varepsilon}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{X1} - \varepsilon_{X2} \\ \varepsilon_{Y1} - \varepsilon_{Y2} \\ \varepsilon_{Z1} - \varepsilon_{Z2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

och

$$\begin{aligned} E\{\bar{\varepsilon}_{\Delta}^T \bar{\varepsilon}_{\Delta}\} &= E\{(\varepsilon_{X1} - \varepsilon_{X2})^2 + (\varepsilon_{Y1} - \varepsilon_{Y2})^2 + (\varepsilon_{Z1} - \varepsilon_{Z2})^2\} = \\ &= \sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2 + \sigma_{Y1}^2 + \sigma_{Y2}^2 + \sigma_{Z1}^2 + \sigma_{Z2}^2 = 6\sigma_k^2 = 2\sigma_{III}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

ger

$$\sigma_{\Delta 3D} = \sqrt{2} \cdot \sigma_{III}. \quad (33)$$

Dvs. formlerna i 2D och 3D blir principiellt likadana.

2.5 Avstånd vs. återbesök

Nu har vi skaffat oss några teoretiska verktyg för att analysera skillnaden mellan mätosäkerheten i ett avstånd och mätosäkerheten i skillnaden mellan ursprunglig mätning och ett återbesök på samma punkt.

Det finns dock två saker ytterligare att reda ut:

- När övergår formlerna för avstånd till formlerna för återbesök ($d=0$)?
- Vilka är de täckningsfaktorer som ska kopplas till respektive standardosäkerhet för beräkning av konfidensintervall och toleranser?

Det sker genom de empiriska simuleringsstudierna i bilaga A, som även avser att verifiera de nyss härledda formlerna för standardosäkerheter. När formlerna övergår i varandra är svårt att spekulera i, men de intuitiva svaren på den senare frågeställningen är:

- Eftersom avstånd är en 1-dimensionell storhet så bör täckningsfaktorn hämtas från raden 1D i Tabell 2.2, dvs. 1.96 vid 95 % täckningsgrad.
- Täckningsfaktorerna för återbesök bör dock hämtas från 2D- respektive 3D-raderna, dvs. 1.73 i 2D och 1.61 i 3D vid 95 % täckningsgrad.

Simuleringsstudien visar att dessa antaganden är korrekta och verifierar övriga formler. Totalt har vi kommit fram till de värden som redovisas i Tabell 2.5.

Tabell 2.5. Standardosäkerheter och konfidensintervall – för avstånd respektive återbesök, i 2D och 3D.

Storhet	2D	3D
Standardosäkerheten i avstånd	σ_{II}	$\sqrt{2/3} \cdot \sigma_{III} \approx 0,816 \cdot \sigma_{III}$
Konfidensintervall för avstånd (95 %)	$\pm 1,96 \cdot \sigma_{II}$	$\pm 1,96 \sqrt{2/3} \cdot \sigma_{III} = \pm 1,60 \cdot \sigma_{III}$
Standardosäkerheten vid återbesök	$\sqrt{2} \cdot \sigma_{II} \approx 1,41 \cdot \sigma_{II}$	$\sqrt{2} \cdot \sigma_{III} \approx 1,41 \cdot \sigma_{III}$
Konfidensintervall vid återbesök (95 %)	$\pm 1,73 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{II} = 2,45 \cdot \sigma_{II}$	$\pm 1,61 \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_{III} = 2,28 \cdot \sigma_{III}$

Studien visar också att övergången mellan formlerna sker vid mycket korta avstånd. Med en mätosäkerhet på cm-nivå sker övergången successivt under de sista centimetrarna. Ur praktisk synvinkel är det naturligtvis en tillräcklig kunskap om hur den processen fungerar.

Någon liknande problematik finns inte i det en-dimensionella fallet, eftersom begreppet "avstånd" då inte kan definieras på motsvarande sätt.

3 Hantering av asymmetri och korrelation

I detta avsnitt hanteras de korrektioner som kan/bör göras i de fall det finns *asymmetri* samt *korrelation* mellan koordinaterna eller mätningarna.

3.1 Väntevärde och varians för kvadratiska former av stokastiska variabler

Definiera den f -dimensionella *stokastiska variabeln*

$$\bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varepsilon_f \end{bmatrix} \in N(0, Q) \quad (34)$$

där matrisen Q benämns *varians-kovariansmatris* och definieras som

$$Q = E\{\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}^T\} \quad (\text{fxf}) \quad (35)$$

Definiera vidare den *kvadratiska formen* $\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}$ där M är en symmetrisk fxf-matris.

Denna kvadratiska form har då (Persson, 1981) *väntevärdet* ¹⁾

$$\begin{aligned} E\{\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}\} &= \text{tr}\{E\{\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}\}\} = \text{tr}\{E\{M \bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^T\}\} = \\ &= \text{tr}\{ME\{\bar{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^T\}\} = \text{tr}\{MQ\} \end{aligned} \quad (36)$$

och *variansen*

$$V\{\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}\} = 2\text{tr}\{MQMQ\} \quad (37)$$

där $\text{tr}\{\}$ betecknar *spåret* i en matris.

Låt oss ta några exempel för att få det hela mer konkret.

Exempel 3.1.a. Sätt $M = I$ och $Q = I$, där I betecknar *enhetsmatrisen* (fxf). Det betyder att alla element i vektorn $\bar{\varepsilon}$ är $N(0,1)$ -fördelade och oberoende av varandra.

Då gäller för väntevärdet (Formel 36)

$$E\{\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}\} = E\{\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}\} = E\left\{\sum_{i=1}^f \varepsilon_i^2\right\} = \text{tr}\{MQ\} = \text{tr}\{I\} = f \quad (38)$$

¹⁾ Formel (36) gäller även för andra fördelningar än normalfördelningen men det gör inte Formel (37).

och för variansen (Formel 37)

$$V\{\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}\} = 2tr\{MQMQ\} = 2tr\{I \cdot I \cdot I \cdot I\} = 2tr\{I\} = 2f \quad (39)$$

Men enligt Formel (2) och (3) så är $\bar{\varepsilon}^T M \bar{\varepsilon}$ inget annat än en χ^2 -fördelad stokastisk variabel med f frihetsgrader, dvs. vi har visat

$$E\{\chi^2(f)\} = f \quad (40)$$

och

$$V\{\chi^2(f)\} = 2f \quad (41)$$

Exempel 3.1.b. Om i stället alla ε_i har variansen σ^2 , dvs. om $Q = \sigma^2 I$, så får vi väntevärdet

$$E\{\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}\} = tr\{Q\} = tr\{\sigma^2 I\} = \sigma^2 tr\{I\} = \sigma^2 f = \sigma_f^2 \quad (42)$$

där vi sätter $\sigma_f^2 = \sigma^2 f$. Variansen blir då

$$\begin{aligned} V\{\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}\} &= 2tr\{Q^2\} = 2tr\{\sigma^4 I\} = 2\sigma^4 tr\{I\} = \\ &= 2\sigma^4 f = \frac{2\sigma^4 f^2}{f} = \frac{2(\sigma^2 f)^2}{f} = \frac{2\sigma_f^4}{f} \end{aligned} \quad (43)$$

Om vi för en godtycklig Q -matris ansätter uttrycket

$$2tr\{Q^2\} = \frac{2\sigma_f^4}{f} \quad (44)$$

och löser ut

$$\hat{f} = \frac{\sigma_f^4}{tr\{Q^2\}} \quad (45)$$

Så får vi det antal "frihetsgrader" \hat{f} som motsvarar variansen $V\{\bar{\varepsilon}^T \bar{\varepsilon}\}$. Då kan vi - som en approximation - använda χ^2 -tabellerna även när ε_i -elementen har olika standardosäkerhet och/eller när dessa element är korrelerade.

3.2 Korrektion för asymmetri och korrelation

Låt oss nu använda detta för att beräkna de korrektioner som kan/bör göras p.g.a. *asymmetri* samt *korrelation* mellan koordinaterna eller mätningarna.

I två dimensioner har en punkts kovariansmatris följande principiella utseende:

$$\begin{pmatrix} Q_{NN} & Q_{NE} \\ Q_{NE} & Q_{EE} \end{pmatrix} \quad (46)$$

där $Q_{NN} = \sigma_N^2$ och $Q_{EE} = \sigma_E^2$.

Definiera vidare $\sigma_{II}^2 = \sigma_N^2 + \sigma_E^2 = Q_{NN} + Q_{EE}$; $q^2 = \frac{\sigma_N^2}{\sigma_E^2} = \frac{Q_{NN}}{Q_{EE}}$ samt

korrelationskoefficienten $\rho = Q_{NE} / \sqrt{Q_{NN}Q_{EE}}$.

Om $Q_{NN} = Q_{EE}$ ($q = 1$) råder symmetri och om $Q_{NE} = 0$ ($\rho = 0$) så är matrisen diagonal, dvs. koordinaterna är okorrelerade. Annars råder asymmetri och/eller korrelation.

Då gäller inte föregående avsnitts formler för standardosäkerhetsmultiplar strikt, men med korrigeringen

$$\begin{aligned}
 f_{**} &= \frac{\sigma_{II}^4}{Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + 2Q_{NE}^2} = \frac{(Q_{NN} + Q_{EE})^2}{Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + 2Q_{NE}^2} = \frac{Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + 2Q_{NN}Q_{EE}}{Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + 2Q_{NE}^2} = \\
 &= \frac{Q_{EE}^2 \left(\frac{Q_{NN}^2}{Q_{EE}^2} + \frac{Q_{EE}^2}{Q_{EE}^2} + 2 \frac{Q_{NN}Q_{EE}}{Q_{EE}^2} \right)}{Q_{EE}^2 \left(\frac{Q_{NN}^2}{Q_{EE}^2} + \frac{Q_{EE}^2}{Q_{EE}^2} + 2 \frac{Q_{NN}}{Q_{NN}} \cdot \frac{Q_{NE}^2}{Q_{EE}^2} \right)} = \frac{q^4 + 1 + 2 \frac{Q_{NN}}{Q_{EE}}}{q^4 + 1 + 2 \frac{Q_{NN}}{Q_{EE}} \cdot \frac{Q_{NE}^2}{Q_{NN}Q_{EE}}} = \\
 &= \frac{1 + q^4 + 2q^2}{1 + q^4 + 2q^2\rho^2}
 \end{aligned}
 \tag{47}$$

kan k_{II} approximativt beräknas som

$$k_{II} = \sqrt{\chi_\alpha^2(f_{**}) / f_{**}} \tag{48}$$

OBS att $Q_{NN} = Q_{EE} = \sigma_{II}^2 / 2$ och $Q_{NE} = 0$ ger $q = 1$ och $\rho = 0$, dvs. $f_{**} = 2$. Det är det största värde f_{**} kan anta; det minsta värdet är 1, alltså $1 \leq f_{**} \leq 2$.

I tre dimensioner har en punkts kovariansmatris följande principiella utseende:

$$\begin{pmatrix} Q_{XX} & Q_{XY} & Q_{XZ} \\ Q_{XY} & Q_{YY} & Q_{YZ} \\ Q_{XZ} & Q_{YZ} & Q_{ZZ} \end{pmatrix} \tag{49}$$

där $Q_{XX} = \sigma_X^2$, $Q_{YY} = \sigma_Y^2$ och $Q_{ZZ} = \sigma_Z^2$

Det ger korrektionsformeln:

$$\begin{aligned}
 f_{**} &= \sigma_{III}^4 / (Q_{XX}^2 + Q_{YY}^2 + Q_{ZZ}^2 + 2Q_{XY}^2 + 2Q_{XZ}^2 + 2Q_{YZ}^2) = \\
 &= \sigma_{III}^4 / (Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + Q_{UU}^2 + 2Q_{NE}^2 + 2Q_{NU}^2 + 2Q_{EU}^2)
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

där N , E och U står för *North*, *East* respektive *Up*.

Det ger

$$k_{III} = \sqrt{\chi_{\alpha}^2(f_{***}) / f_{***}} \quad (51)$$

OBS att $Q_{XX} = Q_{YY} = Q_{ZZ} = \sigma_{III}^2 / 3$ och alla $Q_{ij} = 0$ ger $f_{***} = 3$. Det är det största värdet f_{***} kan anta; det minsta värdet är även här 1, alltså $1 \leq f_{***} \leq 3$.

Låt oss nu ta ett exempel från mätning med GNSS-teknik.

Exempel 3.2. Följande förhållande brukar anses råda mellan mätosäkerheten i plan och höjd:

$$\sigma_{höjd} = 2 \cdot \sigma_{plan} \Leftrightarrow \sigma_{Up} = 2 \sqrt{\sigma_{North}^2 + \sigma_{East}^2} \quad (52)$$

Det ger förhållandena:

$$\sigma_{Up}^2 = 0,8 \cdot \sigma_{III}^2 = Q_{UU} \quad (53)$$

$$\sigma_{North}^2 = 0,1 \cdot \sigma_{III}^2 = Q_{NN} \quad (54)$$

$$\sigma_{East}^2 = 0,1 \cdot \sigma_{III}^2 = Q_{EE} \quad (55)$$

Om vi dessutom antar att alla $Q_{ij} = 0$ så får vi

$$f_{***} = \sigma_{III}^4 / (Q_{NN}^2 + Q_{EE}^2 + Q_{UU}^2) = 1 / (0,64 + 0,01 + 0,01) = 1,52 \quad (56)$$

Asymmetrin ger alltså ett "tapp" från 3 till 1,52 frihetsgrader!

Tabell 3.2.a visar att detta medför att täckningsfaktorerna vid 95 % täckningsgrad därför ska ökas från 1,61 – den optimala i tre dimensioner, se Tabell 2.2 – till ca 1,82, dvs. konfidensintervallet breddas i motsvarande mån enligt:

$$P\{\varepsilon_{III} \leq 1,82\sigma_{III}\} \approx 95\% \quad (57)$$

Tabell 3.2.a. Korrigerade täckningsfaktorer på grund av asymmetri och/eller korrelation. 95 % täckningsgrad (5 % risknivå).

t (alt. f_{**} eller f_{***})	$k = \sqrt{\chi_{5\%}^2(f) / f}$
1	1,96
1,5	1,82
2	1,73
2,5	1,67
3	1,61

Åtminstone vid 95 % täckningsgrad tenderar täckningsfaktorerna att ligga ganska samlade strax under 2, oberoende av dimensionen. Därför kan man vända på steken, tillämpa 2σ i samtliga dimensioner och i stället kolla vilken täckningsgrad det ger.

En sådan sammanställning redovisas i Tabell 3.2.b, och vi kan sammanfatta det hela med att 2σ ger en täckningsgrad på minst 95 % – i en, två och tre dimensioner. Det är därför GUM rekommenderar att 2σ – dvs. täckningsfaktorn 2 – används genomgående.

Tabell 3.2.b. Täckningsgrad för 2σ i en, två och tre dimensioner.

	2σ
1 D	95 %
2 D	95-98 %
3 D	95-99 %

4 Sammanfattning

Rapportens resultat kan sammanfattas i följande punkter, vilka lägger grunden till HMK:s hantering av lägesosäkerhet:

- HMK:s trenivå-princip 1σ , 2σ , 3σ relaterar till normalfördelningen. 1σ kan användas till ett fördelningstest, 2σ som en 95 % tolerans och 3σ för att definiera grova fel.
- Den teoretiska fördelningen ser litet olika ut i 1D, 2D resp. 3D – särskilt beträffande 1σ . Men 2σ ger alltid en täckningsgrad på minst 95 %, oavsett dimension.
- Den teoretiska täckningsfaktorn i 1D blir $\sqrt{\chi_{5\%}^2(1)/1} = 1,96$, dvs. ganska nära 2. Vid total symmetri och okorrelerade koordinater reduceras dock täckningsfaktorn i 2D till $\sqrt{\chi_{5\%}^2(2)/2} = 1,73$ och i 3D till $\sqrt{\chi_{5\%}^2(3)/3} = 1,61$.
- Dessa idealfall kan kompenseras för asymmetri/korrelation genom beräkning av "fiktiva frihetsgrader", som gör att även täckningsfaktorerna i 2D och 3D för 95 % närmar sig 2.
- Uttrycken för standardosäkerhet, täckningsgrader och konfidensintervall är olika för avstånd respektive vid återbesök, se Tabell 2.5.
- Återbesök är alltså inte ett avstånd = 0, men de olika uttrycken – för avstånd resp. återbesök – gör en "smygande" övergång i varandra när avståndet närmar sig ändpunkternas standardosäkerhet.
- Någon liknande problematik finns inte i 1D, eftersom begreppet "avstånd" då inte kan definieras.
- För avstånd använder den "GUM-trogne" konfidensintervallet $\pm 2\sigma_{II}$ i 2D och $\pm 2 \cdot \sqrt{2/3} \cdot \sigma_{III} = \pm 1,63 \cdot \sigma_{III}$ i 3D. Vid återbesök används i GUM täckningsfaktorn $2\sqrt{2} \approx 2,8$ i både 2D och 3D. Dessa ytryck ger minst 95 % täckningsgrad och tar höjd för eventuell asymmetri/korrelation.

Avslutningsvis några GUM-influerade 2D-exempel på hur konfidensintervallen kan tillämpas.

Exempel 4.a. För att ställa upp toleranser.

En positionsbestämning ska kontrolleras genom återbesök. Standardosäkerheten i plan för varje bestämning bedöms vara 10 mm. Toleransen för den radiella skillnaden mellan ursprunglig mätning och kontrollmätning blir alltså $2\sqrt{2} \cdot 10 = \pm 28$ mm.

Exempel 4.b. För att redovisa erhållen mätosäkerhet.

Ett avstånd har beräknats ur de båda ändpunkternas koordinater. Även dessa har en standardosäkerhet på 10 mm i plan (2D). Avståndsbestämningen har alltså en (utvidgad) mätosäkerhet på $2 \cdot 10 = \pm 20$ mm (95 %).

Exempel 4.b ska inte blandas ihop med det fall då avståndet är direktmätt, t.ex. med ett EDM-instrument. Detta illustreras med ytterligare två exempel.

För att få en mätosäkerhet som harmonierar med den i de tidigare exemplen sätter vi standardosäkerheten i det mätta avståndet till 7 mm, vilket motsvarar ca 10 mm i 2D.

Exempel 4.c. Toleranser vid direkt avståndsmätning.

Toleransen för skillnaden mellan två direktmätta avstånd blir, med givna förutsättningar, $2\sqrt{2} \cdot 7 = \pm 20$ mm.

Exempel 4.d. Konfidensintervall för direktmätta avstånd.

Ett direktmätt avstånd har, med givna förutsättningar, en (utvidgad) mätosäkerhet på $2 \cdot 7 = \pm 14$ mm (95 %).

/End of Story

5 Referenser

- I avhandlingen Persson, C-G (1981): *On the Estimation of Variance Components in Linear Models*, KTH, Stockholm, ges kompletta härledningar av formlerna i avsnitt 3.1. Därifrån kommer även idéerna om att kompensera för korrelation-/asymmetri med hjälp av "fiktiva frihetsgrader" i avsnitt 3.2.
- Samtliga HMK-dokument, även de äldre från 1990-talet, nås via HMK:s hemsida: www.lantmateriet.se/HMK
- Nuvarande version av GUM-dokumentet [JCGM 100:2008](http://www.bipm.org/jcgm) förvaltas av konsortiet *Joint Committee for Guides in Metrology* (JCGM).

6 Epilog

Den teori som beskrivs ligger till grund för mycket av synsättet i HMK – såväl i de äldre handböckerna som i de nya som nu håller på att utvecklas. Som litet av "pappa" till den teoribildningen har jag länge känt ett behov av att dokumentera tankegångarna. Det börjar bli dags nu eftersom jag har gått i pension – som ett testamente till dem som ska ansvara för den fortsatta HMK-förvaltningen.

Dessutom har Milan Horemuz, KTH, och Patric Jansson, Trafikverket, aktualiserat frågorna på sistone. Detta kopplat till de GUM-kurser för yrkesverksamma som KTH har hållit under de senaste åren. Även i det sammanhanget saknas delar av de teoretiska grundvalarna och KTH ser dessutom ett visst behov av att ha ett underlag för att kunna belysa dem inom den reguljära geodesiundervisningen.

Håll till godo! /CGP

A Standardosäkerheten i ett avstånd och vid återbesök – en simuleringsstudie

Här verifieras några av de uttryck som har berörts tidigare i texten genom Monte Carlo-simulering.

A.1 Positionsbestämning i 2D

I planet (2D) har följande MATLAB-rutin använts.

```
clear all;clc;echo off;format long;format compact;

sigma2=input('Ange standardavvikelse i plan (mm) '); % änd-
punkternas standardavvikelse i plan
dist=input('Ange punktavstånd (meter) '); % "sant" avstånd
sim=input('Ange antal simuleringar: ');

% Standardosäkerheten i avstånd
fel=zeros(sim,1);
for i=1:sim;
    x1=normrnd(0,1)*sigma2/sqrt(2);
    y1=normrnd(0,1)*sigma2/sqrt(2);
    x2=dist*1000+normrnd(0,1)*sigma2/sqrt(2);
    y2=normrnd(0,1)*sigma2/sqrt(2);
    deltax=(x1-x2);deltay=(y1-y2);
    distskatt=sqrt(deltax^2+deltay^2);
    fel(i,1)=abs(distskatt-dist*1000); % absolutfel i mm
end;
display(' ');
sigmaskatt=sqrt(fel'*fel/sim) % skattade standardosäkerheten
mellan de två positionsbestämningarna

p95=abs(quantile(fel,0.95));% empiriska 95 % percentilen
t95=p95/sigmaskatt % empiriska täckningsfaktorn för 95 %
```

Exempel A.1.a. En körning med standardosäkerheten i plan satt till 10 mm och avståndet till 100 meter ger (1 miljon simuleringar):

```
Ange standardavvikelse i plan (mm): 10
Ange punktavstånd (meter): 100
Ange antal simuleringar: 1000000

sigmaskatt =
    10.004557354256228

t95 =
    1.960381256559582
```

Dvs. avståndets standardosäkerhet är 10 mm (= ändpunkternas standardosäkerhet i plan) och täckningsfaktorn för 95 % täckningsgrad blir 1.96, precis som för den 1-dimensionella normalfördelningen.

Exempel A.1.b. En motsvarande körning med standardosäkerheten i plan satt till 10 mm och avståndet till 0 meter (återbesök) ger:

```
Ange standardavvikelse i plan (mm): 10
Ange punktavstånd (meter): 0
Ange antal simuleringar: 1000000
```

```
sigmaskatt =
    14.137468115217795
```

```
t95 =
    1.729945467854175
```

Dvs. avståndets standardosäkerhet är 14.14 mm (= ändpunkternas standardosäkerhet i plan multiplicerad med $\sqrt{2}$) och täckningsfaktorn för 95 % täckningsgrad blir 1.73, precis som för den 2-dimensionella normalfördelningen.

A.2 Positionsbestämning i 3D

I rymden (3D) har MatLab-rutinen modifierats till

```
clear all;clc;echo off;format long;format compact;

sigma3=input('Ange standardavvikelse i 3D (mm): '); % änd-
punkternas standardavvikelse i plan
dist=input('Ange punktavstånd (meter): ');% "sant" avstånd
sim=input('Ange antal simuleringar: ');

% Standardosäkerheten i avstånd
fel=zeros(sim,1);
for i=1:sim;
    x1=normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    y1=normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    z1=normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    x2=dist*1000+normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    y2=normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    z2=normrnd(0,1)*sigma3/sqrt(3);
    deltax=(x1-x2);deltay=(y1-y2);
    deltaz=(z1-z2);
    distskatt=sqrt(deltax^2+deltay^2+deltaz^2);
    fel(i,1)=abs(distskatt-dist*1000);%a bsolutfel i mm
end;
display(' ');
sigmaskatt=sqrt(fel'*fel/sim)% skattade standardosäkerheten
mellan de två positionsbestämningarna

p95=abs(quantile(fel,0.95));% empiriska 95 % percentilen
t95=p95/sigmaskatt % empiriska täckningsfaktorn för 95 %
```

Exempel A.2.a. En körning med standardosäkerheten i 3D satt till 10 mm och avståndet till 100 meter ger (1 miljon simuleringar):

```
Ange standardavvikelse i 3D (mm): 10
Ange punktavstånd (meter): 100
Ange antal simuleringar: 1000000
```

```
sigmaskatt =  
8.164957258645801
```

```
t95 =  
1.959115791290670
```

Dvs. avståndets standardosäkerhet är 8.165 mm (= ändpunkternas standardosäkerhet i plan multiplicerad med $\sqrt{2/3}$) och täckningsfaktorn för 95 % täckningsgrad blir 1.96, precis som för den 1-dimensionella normalfördelningen.

Exempel A.2.b. En motsvarande körning med standardosäkerheten i 3D satt till 10 mm och avståndet till 0 meter (återbesök) ger:

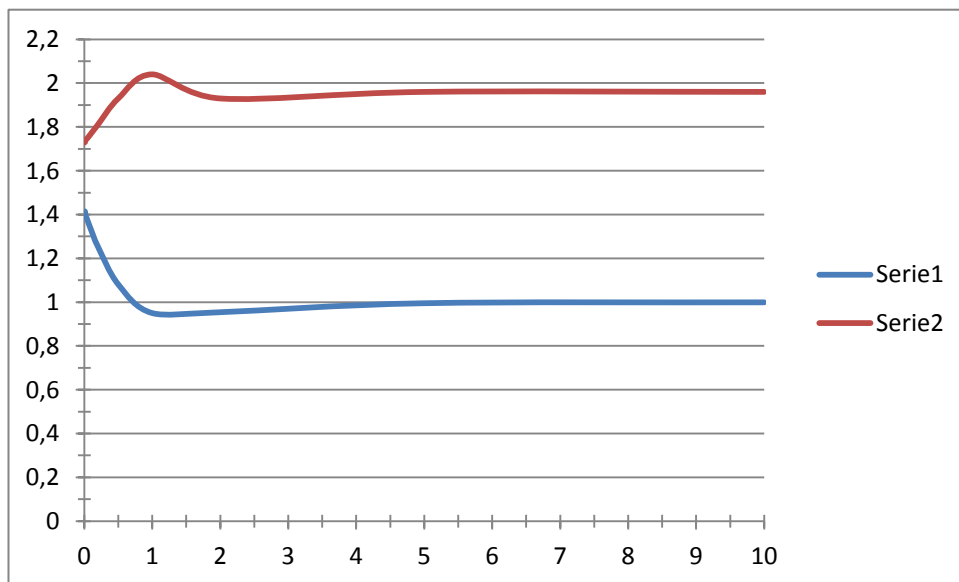
```
Ange standardavvikelse i 3D (mm): 10  
Ange punktavstånd (meter): 0  
Ange antal simuleringar: 1000000
```

```
sigmaskatt =  
14.136220251115105
```

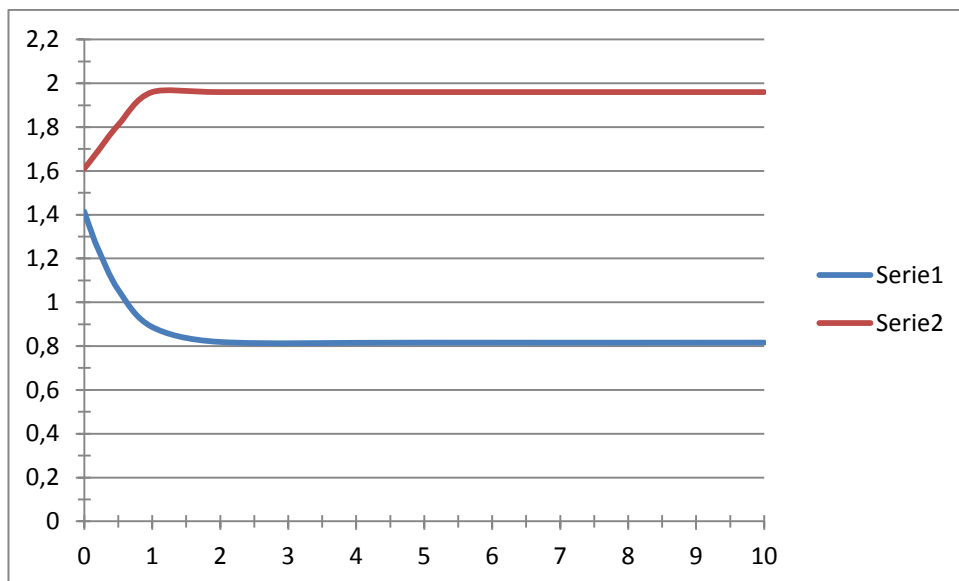
```
t95 =  
1.613858489482438
```

Dvs. avståndets standardosäkerhet är 14.14 mm (= ändpunkternas standardosäkerhet i 3D multiplicerad med $\sqrt{2}$) och täckningsfaktorn för 95 % täckningsgrad blir 1.61, precis som för den 3-dimensionella normalfördelningen.

A.3 Sammanställning



Figur A.3.a. I blått (Serie 1) visas standardosäkerheten i ett avstånd i 2D då ändpunkterna har standardosäkerheten 1 cm i plan och avståndet är mellan 0 och 10 centimeter. I rött (Serie 2) visas motsvarande täckningsfaktor för 95 %.



Figur A.3.b. I blått (Serie 1) visas standardosäkerheten i ett avstånd i 3D då ändpunkterna har standardosäkerheten 1 cm i rymden och avståndet är mellan 0 och 10 centimeter. I rött (Serie 2) visas motsvarande täckningsfaktor för 95 %.

När övergår då standardosäkerheten från 10 till 14.14 mm i 2D – och från 8.16 till 14.14 mm i 3D? Och när övergår täckningsfaktorn för 95 % från 1.96 till 1.73 i 2D – och från 1.96 till 1.61 i 3D? Det visas i Figur A.3.a och A.3.b. OBS att enheten för standardosäkerhet där är cm för att båda kurvorna ska kunna visas i samma figur. 1 miljon simuleringar.

Som synes ändras värdena under de sista centimetrarna, dvs. då avståndet tangerar ändpunkternas standardosäkerhet 10 mm. Fram till dess så finns det en definierad riktning – den mellan (de teoretiska) ändpunkterna – som avståndosäkerheten projiceras på.

Men den sista biten definieras denna riktning i stället av felets riktning, dvs. av $\bar{\varepsilon}_\Delta$:s riktning. Eftersom ingen projicering sker i det senare fallet så ökar värdena då avståndet närmar sig noll.

Dvs. om punktavståndet är ungefär lika med standardosäkerheten så börjar det bli svårt att tydligt avgöra om det är fråga om två olika punkter eller ett återbesök på en och samma punkt.

OBS: MATLAB-rutinerna i detta appendix är endast avsedda att redovisa hur simuleringarna är utförda och vilka formler som har använts. Som gammal FORTRAN-programmerare använder jag ofta den syntaxen i stället för att utnyttja MATLAB:s utvidgade, modernare möjligheter. Milan Horemuz har dock påtalat att rutinerna kan göras ca 200 gånger snabbare om man ersätter for-slingorna med vektoroperationer. ☺ /CGP