

Formelsamling till

Geodetisk och fotogrammetrisk mätningss- och beräkningsteknik



Version 2021-10-04



Geodetisk och fotogrammetrisk mätningss- och beräkningsteknik

by [Lantmäteriet m.fl.](https://lantmateriet.m.fl.) is licensed under a

[Creative Commons Erkännande-Ickekommersiell-IngaBearbetningar 3.0 Unported License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/).

1. Jordmodeller

En ellips beskrivs med hjälp av de två axlarna a och b enligt:

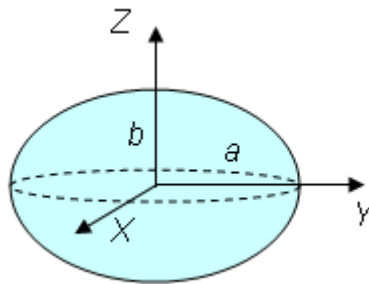
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (1.1)$$

där a är halva storaxeln och b är halva lillaxeln (se Figur 1.1).

Rotationsellipsoiden beskrivs då enligt:

$$\frac{X^2 + Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1 \quad (1.2)$$

där X , Y och Z är givna i ett koordinatsystem med origo i rotationsellipsoidens (ellipsoidisk jordmodell) mittpunkt (dvs. ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem, se Figur 1.1).



Figur 1.1. Rotationsellipsoid med axlarna a och b . X , Y och Z utgör ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem.

Avplattningen (f) på rotationsellipsoiden är definierad som:

$$f = \frac{a-b}{a} \quad (1.3)$$

Samband för att transformera mellan ett sfäriskt koordinatsystem och ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem:

$$\begin{aligned} X &= (R + h_s) \cos \varphi_s \cos \lambda_s \\ Y &= (R + h_s) \cos \varphi_s \sin \lambda_s \\ Z &= (R + h_s) \sin \varphi_s \end{aligned} \quad (1.4)$$

där R är jordradien (kan approximeras till 6 370 000 m), φ_s är sfärisk latitud, λ_s är sfärisk longitud och h_s är höjd över sfären.

Omvänt samband definieras enligt:

$$\begin{aligned}\tan \lambda_s &= \frac{Y}{X} \\ \tan \varphi_s &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h_s &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} - R\end{aligned}\tag{1.5}$$

Sambandet för att transformera mellan ett geografiskt koordinatsystem (latitud (φ) longitud (λ) och höjd över ellipsoiden (h)) och ett geocentriskt kartesiskt koordinatsystem är:

$$\begin{aligned}X &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ Y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ Z &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi\end{aligned}\tag{1.6}$$

där N är *tvärkrökningsradien* och e är den *första excentriciteten*. Dessa båda parametrar bestäms av ellipsoidens form och definieras som:

$$\begin{aligned}e^2 &= 2f - f^2 \\ N &= \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 (\sin \varphi)^2}}\end{aligned}\tag{1.7}$$

Det inversa sambandet mellan kartesiska koordinater och geografiska koordinater ges av följande formelsamband:

$$\begin{aligned}\tan \lambda &= \frac{Y}{X} \\ \tan \varphi &= \frac{Z + \left(\frac{ae^2}{\sqrt{1 - e^2}} \right) (\sin \theta)^3}{p' - ae^2 (\cos \theta)^3} \\ h &= \frac{p'}{\cos \varphi} - N\end{aligned}\tag{1.8}$$

där

$$\begin{aligned}p' &= \sqrt{X^2 + Y^2}, \text{ och} \\ \tan \theta &= \frac{Z}{p' \sqrt{1 - e^2}}\end{aligned}$$

1.1. Avståndsberäkningar

Euklidiskt avstånd:

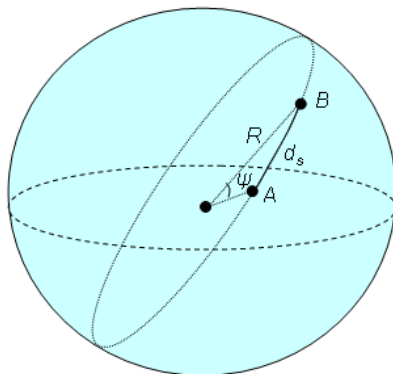
$$d_E = \sqrt{(X_A - X_B)^2 + (Y_A - Y_B)^2 + (Z_A - Z_B)^2}\tag{1.9}$$

Sfäriskt avstånd (se beteckningar i Figur 1.2):

$$d_s = R\psi \quad (1.10)$$

$$\cos\psi = \sin\varphi_{s,A} \sin\varphi_{s,B} + \cos\varphi_{s,A} \cos\varphi_{s,B} \cos(\lambda_{s,A} - \lambda_{s,B}) \quad (1.11)$$

där R är jordradien (kan approximeras till 6 370 000 m) och ψ är bågavståndet.



Figur 1.2. Sfäriskt avstånd (d_s).

2. Kartprojektioner

Omräkning av sfärska koordinater till koordinater i Mercatorprojektionen (N, E):

$$N = R \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_s}{2} \right) \right) \quad (2.1)$$

$$E = R\lambda_s$$

där sfärsik latitud (φ_s) och sfärsik longitud (λ_s) anges i radianer.

3. Höjdsystem

För konvertering mellan olika höjdsystem används:

$$H = h - N \quad (3.1)$$

h = höjden över ellipsoiden,

H = höjden över geoiden, och

N = geoidhöjd.

Samband mellan höjden över ellipsoiden i SWEREF99, geoidhöjden i SWEN17_RH2000 och höjden över havet i RH 2000 är:

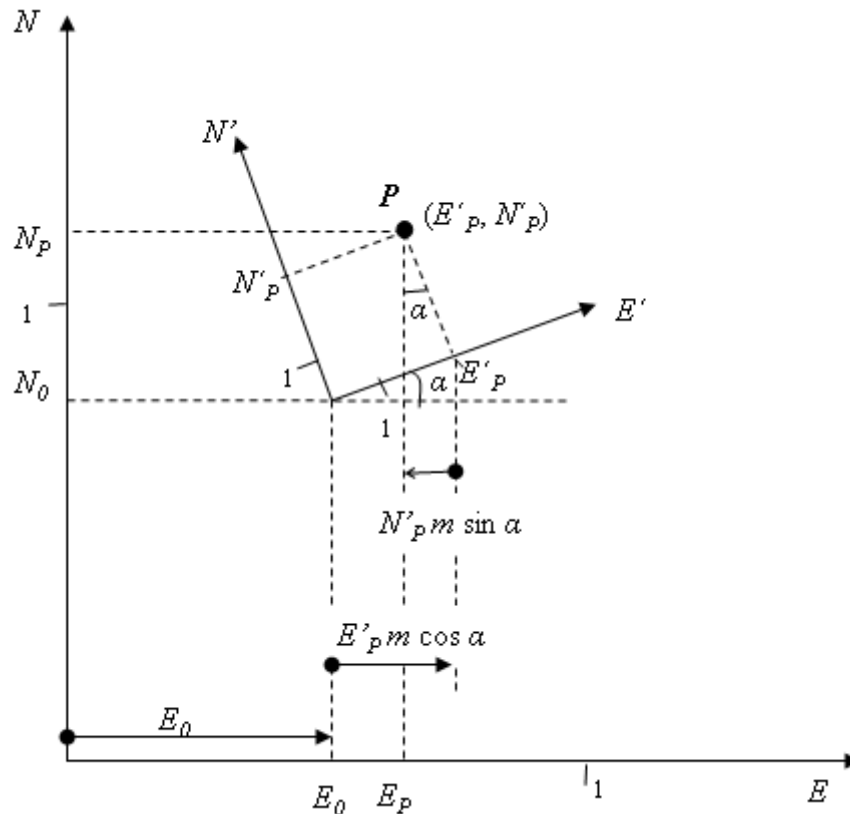
$$H_{RH\ 2000} = h_{SWEREF99} - N_{SWEN17_RH2000} \quad (3.2)$$

4. Koordinattransformationer

Helmertransformering (likformig transformation) i två dimensioner ges av (se beteckningar i Figur 4.1):

$$\begin{bmatrix} E_P \\ N_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 \\ N_0 \end{bmatrix} + m \mathbf{R}_2 \begin{bmatrix} E'_P \\ N'_P \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

där m är skalfaktorn och \mathbf{R}_2 är den tvådimensionella rotationsmatrisen.



Figur 4.1. Helmertransformering.

Den tvådimensionella rotationsmatrisen \mathbf{R}_2 är en funktion av vridningen α och definieras som:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Om man använder uttrycket för rotationsmatrisen \mathbf{R}_2 i formel 4.1 erhålls följande samband för Helmertransformeringen:

$$\begin{aligned} E_P &= E_0 + E'_P m \cos \alpha - N'_P m \sin \alpha \\ N_P &= N_0 + E'_P m \sin \alpha + N'_P m \cos \alpha \end{aligned} \quad (4.3)$$

5. Mätutrustning

Samband mellan våglängd (λ), utbredningshastighet (c) och frekvens (f) för elektromagnetiska vågor:

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (5.1)$$

Utbredningshastigheten, c , beräknas enligt:

$$n = \frac{c_0}{c} \quad (5.2)$$

där c_0 är ljushastigheten i vacuum ($2,99792458 \cdot 10^8$ m/s) och n är brytningsindex.

Längdberäkning med impulsinstrument:

$$d = \frac{c_0 t}{2n} \quad (5.3)$$

där t är gångtiden.

Längdberäkning med fasskillnadsmätning:

$$d = N \frac{\lambda}{2} + \frac{\Delta\lambda}{2} \quad (5.4)$$

där N är antalet hela våglängder och $\Delta\lambda$ är den mot fasskillnaden svarande delen av en hel våglängd.

Givet från fasräknaren är fasskillnaden, $\Delta\varphi$, och den resterande delen av en våglängd som svarar mot denna fasskillnad blir då:

$$\Delta\lambda = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \lambda \quad (5.5)$$

Det andra momentet är att bestämma antalet hela våglängder (N). Om vi i ekvation (5.4) sätter $\lambda/2=U$ och $\Delta\lambda/2=R$, så får vi:

$$d = NU + R \quad (5.6)$$

U kallas också för *enhetslängd* och hela antalet hela våglängder kan beräknas om vi mäter längden med olika frekvenser. Vi får då:

$$\begin{aligned} f_1: & d = N_1 U_1 + R_1 \\ f_2: & d = N_2 U_2 + R_2 \\ & \vdots \\ f_n: & d = N_n U_n + R_n \end{aligned} \quad (5.7)$$

Ekvationssystemet kan lösas genom att välja f_1 så att U_1 alltid är större än den mätta sträckan. Då är $N_1=0$ och den första ekvationen är $d=R_1$, och vi har en entydig lösning av sträckan d . Lösningen begränsas dock av upplösningen i fasmätningen.

6. Mätmetoder

Formeln för en *orienterad riktning* mellan punkterna A och B lyder:

$$\varphi_{AB} = \arctan\left(\frac{E_B - E_A}{N_B - N_A}\right) = \arctan\left(\frac{\Delta E}{\Delta N}\right) \quad (6.1)$$

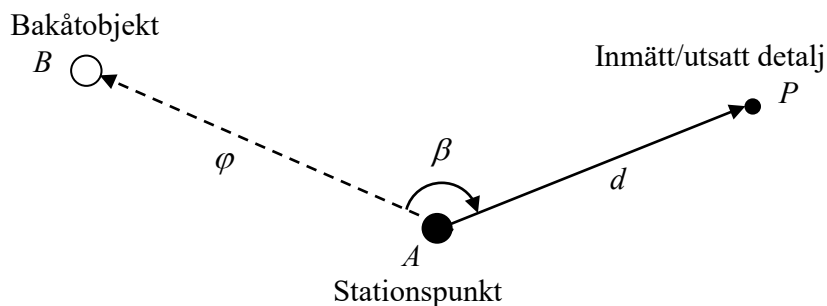
där man måste hålla reda på i vilken kvadrant riktningen ligger.

Formeln för *avstånd* har utseendet:

$$d_{AB} = \sqrt{(N_B - N_A)^2 + (E_B - E_A)^2} = \sqrt{\Delta N^2 + \Delta E^2} \quad (6.2)$$

Koordinatberäkning vid *polär mätning* sker enligt följande (se Figur 6.1):

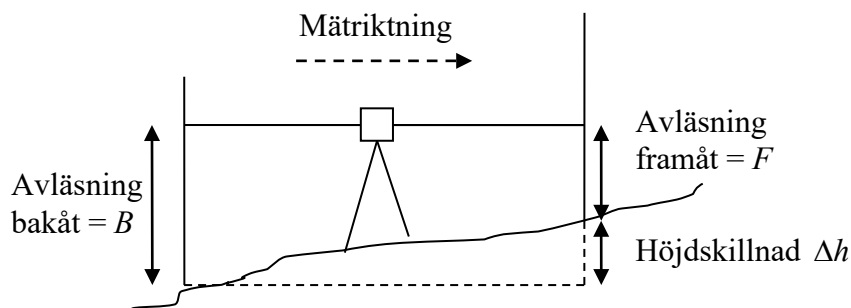
$$\begin{aligned} N_P &= N_A + d \cos(\varphi + \beta) \\ E_P &= E_A + d \sin(\varphi + \beta) \end{aligned} \quad (6.3)$$



Figur 6.1. Polär mätning

Grundprincipen vid *avvägning* formuleras som (se Figur 6.2):

$$B = F + \Delta h \Leftrightarrow \Delta h = B - F \quad (6.4)$$

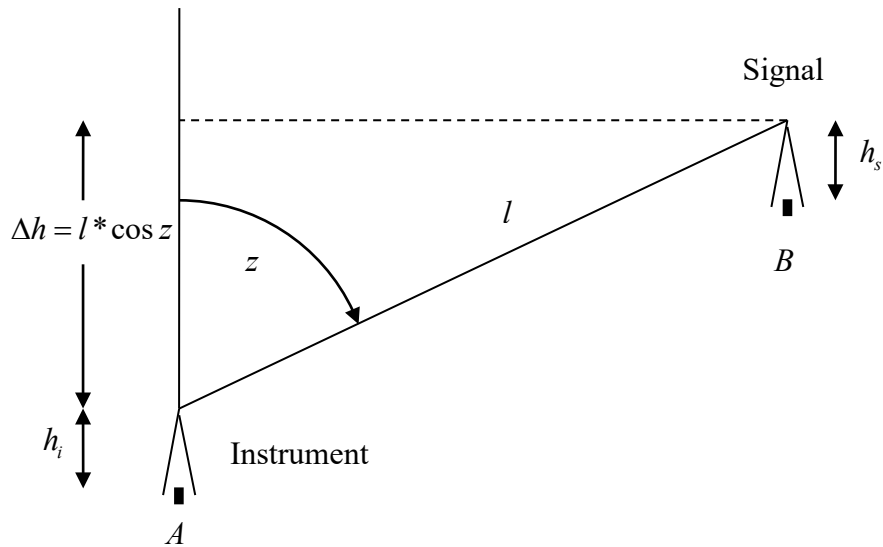


Figur 6.2. Grundprincipen vid avvägning.

Den kompletta formeln för *trigonometrisk höjdmätning* mellan punkterna A och B lyder (se Figur 6.3):

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A = (h_i - h_s) + l \cos z + \frac{l^2 \sin^2 z \cdot (1 - 0.14)}{2R} \quad (6.5)$$

där ΔH är höjdskillnad och H_i betecknar höjd. Den sista termen är korrektionen för *jordkrökning* och *refraktion*. R (jordens krökningsradie) varierar beroende på var man befinner sig på jorden; i Sverige kan R sättas till 6 390 km.



Figur 6.3. Trigonometrisk höjdmätning.

6.1 Areaformeln

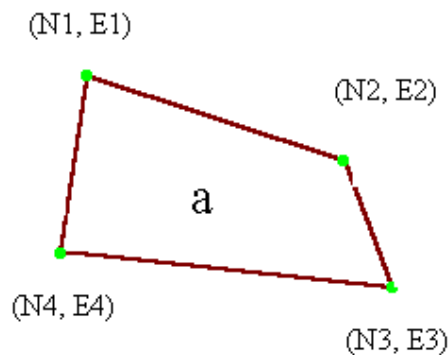
Arean av en polygon (a) där koordinaterna är kända för begränsningspunkterna och där begränsningslinjerna mellan punkterna är rätta linjer beräknas enligt formeln:

$$a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n N_i (E_{i+1} - E_{i-1}) \quad (6.6)$$

där

N_i = N -koordinat för en brytpunkt på polygonen
 E_i = E -koordinat för en brytpunkt på polygonen, och
 n är antalet brytpunkter.

Observera att punkterna ska numreras i medsols (medurs) ordning (se Figur 6.4).



Figur 6.4. Punktnummering vid areaformeln. Observera att sista punkten (här 4) också får beteckningen noll och att första punkten också får beteckningen $n+1$ (här 5), där n är antalet brytpunkter. Detta är ett krav för att indexen i formel 6.6 ska bli korrekta.

7 Mätosäkerhet och minsta kvadratberäkningar

7.1 Mätosäkerhet

Standardosäkerheten i en enskild mätning l i en mätserie är detsamma som standardavvikelsen:

$$u(l) = u_p = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{l} - l_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^2} \quad (7.1)$$

där \bar{l} är medeltalet

$$\bar{l} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i \quad (7.2)$$

n är antalet mätningar och $n-1$ antalet överbestämningar. v_i benämns förbättring.

Ett viktat medeltal beräknas som:

$$\bar{l}_p = \frac{p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + p_n l_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i l_i}{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (7.3)$$

där p_i betecknar respektive mätningens vikt. Motsvarigheten till standardavvikelsen benämns viktsenhetens standardosäkerhet och beräknas enligt:

$$u_p = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i (\bar{l}_p - l_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n p_i v_i^2} \quad (7.4)$$

ur vilken den enskilda mätningens standardosäkerhet kan beräknas som:

$$u(l_i) = u_p / \sqrt{p_i} \quad (7.5)$$

Sammanlagd standardosäkerhet är en tillämpning av lagen om fortplantning av mätosäkerhet på formeln:

$$x = f(l_1, l_2, l_3, \dots) \quad (7.6)$$

Denna "lag" lyder:

$$u_c^2(\hat{x}) = c_1^2 u^2(l_1) + c_2^2 u^2(l_2) + c_3^2 u^2(l_3) + \dots \quad (7.7)$$

De partiella derivatorna $c_i = \frac{\delta x}{\delta l_i}$ benämns känslighetsfaktorer. Indexet c står för *combined*.

Tillämpning av fortplantningslagen ger följande formler för beräkning av (det enkla) medeltalets standardosäkerhet:

$$u(\bar{l}) = u(l) / \sqrt{n} = u_p / \sqrt{n} \quad (7.8)$$

och det viktade medeltalets standardosäkerhet:

$$u(\bar{l}_p) = u_p / \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i} \quad (7.9)$$

Utvidgad mätosäkerhet beräknas som:

$$U_{95}(\hat{x}) = k_{95} u(\hat{x}) \quad (7.10)$$

(för skattningen \hat{x}). k_{95} är täckningsfaktorn och 95 täckningsgraden i %.

7.2 Minsta-kvadratutjämning med matriser

Inversen till en 2*2-matris \mathbf{B} beräknas enligt:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}} \begin{pmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{pmatrix} \quad (7.11)$$

Observationsekvationerna vid elementutjämning formuleras som:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{l} + \mathbf{v} \quad (7.12)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

där \mathbf{A} ($n \times m$) är koefficientmatrisen, som anger sambandet mellan n stycken mätningar \mathbf{l} och m stycken obekanta, som skattas av $\hat{\mathbf{x}}$. Vektorn \mathbf{v} innehåller förbättringarna.

Genom att lösa *normalekvationerna*:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7.13)$$

där \mathbf{A}^T betecknar matrisen \mathbf{A} 's transponat, erhålls minsta-kvadratskattningarna:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (7.14)$$

\mathbf{P} betecknar *viktsmatrisen*:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & P_{mm} \end{pmatrix} \quad (7.15)$$

som, liksom enhetsmatrisen, är en diagonalmatris, där $p_i = P_{ii}$.

Viktsenhetens standardosäkerhet ges av (jfr 7.4):

$$u_p = \sqrt{\frac{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{n - m}} \quad (7.16)$$

och skattningarnas *varians-kovariansmatris* av:

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} = u_p^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} u^2(\hat{x}_1) & \cdots & u(\hat{x}_1, \hat{x}_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(\hat{x}_m, \hat{x}_1) & \cdots & u^2(\hat{x}_m) \end{pmatrix} \quad (7.17)$$

Skattningarnas *korrelation* kan mätas med (jfr 7.23):

$$\rho_{ij} = \frac{u(\hat{x}_i, \hat{x}_j)}{\sqrt{u^2(\hat{x}_i)u^2(\hat{x}_j)}} = \frac{u(\hat{x}_i, \hat{x}_j)}{u(\hat{x}_i)u(\hat{x}_j)} \quad (7.18)$$

och standardosäkerheten för en (linjär) funktion $\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}$ av de obekanta ges av:

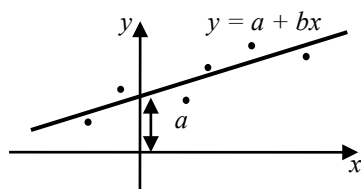
$$u^2(\mathbf{f}\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{f} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbf{f}^T = u_p^2 \mathbf{f} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{f}^T \quad (7.19)$$

7.3 Regression och korrelation

Linjär regression går ut på att anpassa en rät linje (se Figur 7.1):

$$y = a + bx \quad (7.20)$$

till parvisa mätdata i två serier. Observera att vi här använder matematiska definitioner på x och y .



Figur 7.1. Linjär regression

Grundformeln (8.12) ger ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \quad (7.21)$$

Utifrån detta kan man sedan beräkna skattningarna på parametrarna a och b , osäkerhetsmått etc. på sedvanligt manér. Det finns dock ett bättre sätt, se nedan.

Kovariansen mellan två mätserier:

$$u(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \quad (7.22)$$

mäter graden av samvariation. Korrelationskoefficienten är en normerad kovarians, ett tal mellan -1 och +1, som beräknas som (jfr 7.18):

$$\rho_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (7.23)$$

Med hjälp av denna storhet kan formeln för linjär regression skrivas om till:

$$y = \bar{y} + \rho_{xy} \frac{u(y)}{u(x)} (x - \bar{x}) \quad (7.24)$$

som endast utnyttjar medeltalen (\bar{x} , \bar{y}), standardavvikelserna ($u(x)$, $u(y)$) samt korrelationskoefficienten ρ_{xy} . Linjeanpassningen är meningsfull bara om $|\rho_{xy}| \geq 0,7$ (grov tumregel).

8 Grundläggande teorier om GNSS

Linjärt ekvationssystem för beräkning av koordinaterna hos mottagarna \mathbf{p}_M genom kännedom om avståndet mellan satellit och mottagare $|\rho|$ samt satelliternas koordinater \mathbf{p}^S :

$$|\rho| = |\mathbf{p}^S - \mathbf{p}_M| \quad (8.1)$$

Det blir en ekvation för varje satellit.

8.1 Observationsekvationer

Kodmätning

Pseudoavståndet mellan mottagaren och satelliten (R) uttrycks enligt:

$$R = \rho + c(\delta_M - \delta^S) \quad (8.2)$$

där δ_M är mottagarens klockkorrektur, δ^S är satellitens klockkorrektur och ρ är geometriskt avstånd mellan mottagaren M och satelliten S :

$$\rho = c(t_M(GPS) - t^S(GPS)) = \sqrt{(X^S - X_M)^2 + (Y^S - Y_M)^2 + (Z^S - Z_M)^2} \quad (8.3)$$

där X^S, Y^S, Z^S är satellitens koordinater, X_M, Y_M, Z_M är mottagarens sökta koordinater och c är ljusets hastighet.

Mottagarens klockkorrektur (δ_M) och satellitens klockkorrektur (δ^S) används för att beräkna systemtiden (GPS) för mottagningstiden t_M och sändningstiden t^S :

$$\begin{aligned} t_M(GPS) &= t_M - \delta_M \\ t^S(GPS) &= t^S - \delta^S \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ett ekvationssystem skapas ur formel (8.3) och (8.4) där $(X_M, Y_M, Z_M, \delta_M)$ är obekanta; därför behövs det minst fyra satelliter för positionsbestämning i 3D.

Fasmätning

Fasmätning skiljer sig från kodmätning bara genom periodobekanta. Därför ersätter vi R med φ och adderar periodobekanta (N) i formel (8.2). Då fås:

$$\lambda\varphi = \Phi = \rho + c(\delta_M - \delta^S) + \lambda N \quad (8.5)$$

där λ är bär våglängd och Φ är fasmätning uttryckt i meter.

Observationsekvationer med felkällor

Observationsekvationerna, med felkällorna inkluderade, kan skrivas som:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 &= \rho + \lambda_1 N_1 + c(\delta_M - \delta^S) - I + T + O + MP_{11} + \varepsilon_{11} \\
 \Phi_2 &= \rho + \lambda_2 N_2 + c(\delta_M - \delta^S) - \frac{f_1^2}{f_2^2} I + T + O + MP_{12} + \varepsilon_{12} \\
 R_1 &= \rho + c(\delta_M - \delta^S) + I + T + O + MP_{21} + \varepsilon_{21} \\
 R_2 &= \rho + c(\delta_M - \delta^S) + \frac{f_1^2}{f_2^2} I + T + O + MP_{22} + \varepsilon_{22}
 \end{aligned} \tag{8.6}$$

där index 1 och 2 betecknar bärvåg L1 och L2, f är frekvens, I och T är jonosfärisk resp. troposfärisk effekt, O är radiellt satellitpositionsfel, MP är flervägsfel och ε är slumpmässiga observationsfel.

8.2 Matematisk modell för positionsbestämning

Matematisk modell för positionsbestämning är:

$$R_M^S - \rho_{0M}^S + c\delta^S - I_M^S - T_M^S - \varepsilon = a_X^S dX + a_Y^S dY + a_Z^S dZ + c\delta_M \tag{8.7}$$

där R_M^S är pseudoavståndet mätt av mottagaren M till satelliten S , ρ_{0M}^S är det geometriska avståndet beräknat m.h.a. mottagarens närmekoordinater X_{0M}, Y_{0M}, Z_{0M} och koefficienterna a är de partiella derivatorna av ρ_M^S med avseende på mottagarens koordinater, beräknat i punkten (X_{0M}, Y_{0M}, Z_{0M}) .

Ekvationerna uttrycks enligt i matrisform till ekvationssystemet:

$$\lambda + \mathbf{v} = \mathbf{A}d\hat{\mathbf{x}} \tag{8.8}$$

med minsta-kvadratlösningen:

$$d\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \lambda \tag{8.9}$$

Vektorn λ innehåller vänsterledet i formel (9.7).

Varje rad i koefficientmatrisen \mathbf{A} innehåller tre kolumner med koefficienterna a samt en kolumn med 1:or och elementen i vektorn $d\hat{\mathbf{x}}$ är skattningarna av de obekanta parametrarna dX, dY, dZ och δ_M . Antalet rader i λ och \mathbf{A} är lika med antalet observationer.

Diagonalelementen i matrisen $\mathbf{Q} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ används för beräkning av de s.k. *DOP-talen* ($DOP = Dilution Of Precision$) som är kvalitetsmått:

$$\begin{aligned}
 PDOP &= \sqrt{Q_{XX} + Q_{YY} + Q_{ZZ}} \\
 GDOP &= \sqrt{Q_{XX} + Q_{YY} + Q_{ZZ} + Q_{\delta\delta}}
 \end{aligned} \tag{8.10}$$

I praktiken spelar det ingen roll vilken DOP som används, normalt ligger värdena mellan 1 och 3. Värden mindre än 7 är acceptabla.

Om observationer på bägge frekvenser finns så kan man forma en s.k. jonosfärsfri kombination enligt:

$$R_3 = \frac{R_1 f_1^2 - R_2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} = \rho + c(\delta_M - \delta^S) + T + O + MP_3 + \varepsilon_3 \quad (8.11)$$

där T är troposfärisk effekt, O är radiellt satellitpositionsfel, MP är flervägsfel och ε är slumpmässiga observationsfel.

Relativpositionering

Enkeldifferens mellan fas- eller kodobservationer utförda från två mottagare till en satellit uttryckts enligt:

$$\Phi_{AB}^S = \Phi_A^S - \Phi_B^S = \rho_{AB}^S + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^S + I_{AB}^S + T_{AB}^S + O_{AB}^S + MP_{AB}^S + \varepsilon_{AB}^S \quad (8.12)$$

Där index AB betyder differens mellan parametrarna för A och B , t.ex. $N_{AB}^S = N_A^S - N_B^S$.

Allmänt gäller:

$$I_{AB}^S \rightarrow 0; T_{AB}^S \rightarrow 0; O_{AB}^S \rightarrow 0 \text{ om avståndet } AB \rightarrow 0 \quad (8.13)$$

I praktiken är dessa differenser aldrig lika med noll, men de är försumbara för korta baslinjer: I_{AB}^S och T_{AB}^S är försumbara för baslinjer kortare än ca 15 km och O_{AB}^S för baslinjer kortare än ca 100 km.

För att även eliminera mottagarnas klockfel bildar man *dubbeldifferenser*: differensen mellan två enkeldifferenser. För korta baslinjer kan vi skriva enkeldifferenserna för satelliterna S och T som:

$$\begin{aligned} \Phi_{AB}^S &= \rho_{AB}^S + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^S + MP_{AB}^S + \varepsilon_{AB}^S \\ \Phi_{AB}^T &= \rho_{AB}^T + c\delta_{AB} + \lambda_1 N_{AB}^T + MP_{AB}^T + \varepsilon_{AB}^T \end{aligned} \quad (8.14)$$

Dubbeldifferensen formas som differensen $\Phi_{AB}^{ST} = \Phi_{AB}^S - \Phi_{AB}^T$:

$$\Phi_{AB}^{ST} = \Phi_{AB}^S - \Phi_{AB}^T = \rho_{AB}^{ST} + \lambda_1 N_{AB}^{ST} + MP_{AB}^{ST} + \varepsilon_{AB}^{ST} \quad (8.15)$$