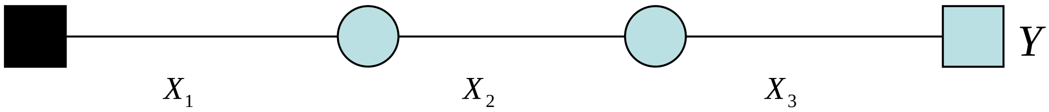
GUM – ett exempel (Typ A)

Detta exempel avser att klargöra GUMs terminologi samt att ganska detaljerat beskriva arbetsgången, beteckningarna, beräkningsmetoderna och redovisningsprinciperna. Vissa referenser/översättningar görs även till den etablerade svenska mätningstekniska terminologin.

Problemet: Flygande höjdtåg i en tunnel

Uppgiften är att beräkna höjden på en fix inne i en tunnel. Ett höjdtåg markeras bestående av startpunkt, slutpunkt (vars höjd söks) samt två hjälpfixar, se figuren.



Sambandet mellan in- och utstorheterna

Det ”flygande” höjdtåget består alltså av tre delsträckor: X_1, X_2, X_3. Om vi för enkelhets skull sätter startpunktens höjd till 0, så får vi ekvationen:

$$Y = X_1 + X_2 + X_3$$

där Y är den sökta höjden. Denna ”grundekvation” fastställer sambandet mellan *instorheterna* och *utstorheten*, dvs. den *mätstorhet* vi ytterst vill ha kunskap om.

Eftersom det alltså inte går att ansluta höjdtåget så görs upprepade mätningar av varje delsträcka – fler ju längre in i tunneln man kommer. Resultatet redovisas i följande tabell. Enheten är meter och x_i är en *mätning* av storheten X_i. n_i är antalet mätningar i varje serie.

x_1 ($n_1 = 4$)	x_2 ($n_2 = 6$)	x_3 ($n_3 = 8$)
5,1240	0,6262	3,2592
5,1148	0,6125	3,2516
5,1147	0,6355	3,2421
5,1202	0,6067	3,2580
-	0,6224	3,2649
-	0,6253	3,2696
-	-	3,2501
-	-	3,2597

Instorheterna och deras standardosäkerheter

Beräkning av medeltal och standardavvikelse för ovanstående mätserier ger:

	Beteckning	X_1	X_2	X_3
Medeltal	$\bar{x}_i$	5,118425 m	0,621433 m	3,256900 m
Standardmätosäkerhet (för en enskild mätning)	$u(x_i) = s_i$	4,5184 mm	10,3282 mm	8,7260 mm
Medeltalets standardosäkerhet	$u(\bar{x}_i) = u(x_i)/\sqrt{n_i}$ $= s_i/\sqrt{n_i}$	2,2592 mm	4,2165 mm	3,0851 mm
Frihetsgrader	$\upsilon_i = n_i - 1$	4 – 1 = 3	6 - 1 = 5	8 - 1 = 7

Standardmätosäkerheten (eller s*tandardosäkerheten)* är den vanliga standardavvikelsen (s_i) eller ”medelfelet”. ”Medeltalets medelfel” benämns i GUM *medeltalets standardosäkerhet*. *Frihetsgrader* är samma sak som antalet överbestämningar.

I dessa förberedande steg bör man ta med många siffror i beräkningarna. Avrundning sker i slutresultatet.

Beräkning av utstorheten

Utstorheten/mätstorheten följer direkt av ”grundekvationen” ovan, dvs. av sambandet mellan instorheterna och utstorheten. Vårt *mätresultat* blir alltså:

$$y = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3 = 5{,}118425 + 0{,}621433 + 3{,}256900 = 8{,}996758 \text{ m}$$

Beräkning av känslighetsfaktorerna och den sammanlagda standardosäkerheten

För att även kunna skatta utstorhetens mätosäkerhet krävs först att vi beräknar hur ett fel i resp. instorhet påverkar felet i utstorheten. Det görs m.h.a. *känslighetsfaktorerna*

$$c_i = \frac{\delta Y}{\delta X_i}$$

Dessa faktorer sätts sedan in tillsammans med instorheternas standardosäkerheter i *lagen om fortplantning av mätosäkerhet* (”medelfelets fortplantningslag)

$$u_c^2(y) = c_1^2 u^2(\overline{x}_1) + c_2^2 u^2(\overline{x}_2) + c_3^2 u^2(\overline{x}_3)......$$

eller

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_i c_i^2 u^2(\overline{x}_i)}$$

där $u_c(y)$ är den *sammanlagda standardosäkerheten* för utstorheten y (*c* står för ”combined” och $u^2(\cdot)$ benämns *varians).*

I vårt exempel får vi

$$c_i = \frac{\delta Y}{\delta X_i} = 1 \qquad \forall i$$

dvs.

$$u_c(y) = \sqrt{u^2(\overline{x}_1) + u^2(\overline{x}_2) + u^2(\overline{x}_3)}$$

eller med siffror:

$$u_c(y) = \sqrt{2{,}2592^2 + 4{,}2165^2 + 3{,}0851^2} = 5{,}6921 \text{ mm}$$

som avrundas till $5{,}7$ mm, eftersom mätosäkerhet standardmässigt anges med två siffror.

Bestämning av täckningsfaktor och beräkning av utvidgad mät-osäkerhet

Om man förutsätter normalfördelning, vilket ofta – som i vårt fall – är ett rimligt antagande, så ger intervallet

$$\pm\text{standardosäkerheten}$$

bara ca. 68% *konfidensnivå*, dvs i ungefär 1/3 av fallen så ligger den sökta (ut)storheten utanför detta intervall. Därför brukar man ”förlänga” intervallet genom att multiplicera med en *täckningsfaktor k*. Denna förlängning benämns *utvidgad mätosäkerhet*.

Mycket vanligt är uttrycket

$$\pm 1,96u(x)$$

där alltså $k = 1,96$ (avrundat $k = 2$). Om standardosäkerheten $u(x)$ är känd så ger detta intervall 95% konfidensnivå. Det har fått bilda skola inom tillämpningen av GUM, dvs. $k = 2$ och/eller konfidensnivån 95% bör i första hand användas vid beräkningen av utvidgad mätosäkerhet.

Eftersom standardosäkerheten (för instorheterna) i vårt fall inte var känd utan skattades från mätningarna bör vi tillämpa t-fördelningen i stället för normalfördelningen vid beräkningen. Om vi vill behålla konfidensnivån 95% så kommer vår täckningsfaktor därigenom att bli något större än 2.

Men hur många frihetsgrader blir det då i skattningen av den sammanlagda standardosäkerheten, då man utgår från att antalet frihetsgrader från instorheterna är 3, 5 resp. 7?

I GUM ges en formel för denna uppskattning. Den benämns Wech-Satterthwaites formel och lyder:

$$\upsilon_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_i \frac{c_i^4 u^4(\overline{x}_i)}{\upsilon_i}}$$

där υ_{eff} är det effektiva antalet frihetsgrader för den sammanlagda standardosäkerheten och υ_i är antalet frihetsgrader i skattningen av resp. instorhets standardosäkerhet. υ_{eff} kan aldrig bli större än summan av instorheternas frihetsgrader (i vårt fall har vi $\upsilon_{eff} \le 3+5+7=15$).

Med exemplets siffror erhålls:

$$\upsilon_{eff} = \frac{5,6921^4}{\frac{2,2592^4}{3} + \frac{4,2165^4}{5} + \frac{3,0851^4}{7}} \approx 12 \text{ frihetsgrader}$$

Tabellvärdet i t-fördelningen för konfidensnivån 95% och 12 frihetsgrader är:

$$t_{95}(12) = 2,18$$

som alltså får bli den täckningsfaktor – det *k*-värde – som vi använder (även om $k = 2$ inte hade varit helt fel).

Det förlängda intervallet blir alltså:

$$U_{95}(y) = k_{95} * u_c(y) = 2,18 * 5,6921 = 12,41 \text{ mm}$$

där $U_{95}(y)$ – avrundat till 12 mm – är den utvidgade mätosäkerheten för *y* på konfidensnivån 95%. Kortare skrivsätt är $U(y)$, eller t.o.m. U , och enbart k i stället för k_{95}.

Observera att man bör vara övertydlig och redovisa såväl täckningsfaktorn och den sammanlagda standardosäkerheten som den utvidgade mätosäkerheten, inte bara den sistnämnda storheten!

Rapportering av mätresultat och mätosäkerhet

Sammantaget får vi:

”Slutpunktens höjd över startpunkten har uppmätts till +8,997 meter. Den utvidgade mätosäkerheten *U* uppskattas till ± 0,012 meter på konfidensnivån 95%. Den har beräknats som $U = k * u_c$, med täckningsfaktorn $k = 2{,}18$ och den sammanlagda standardosäkerheten $u_c = 0{,}0057$ m. Täckningsfaktorn $k = t_{95}(12)$, där 12 är antalet effektiva frihetsgrader i skattningen u_c. Analysen bygger på antagandet att mätningarna är normalfördelade.”

Denna redovisning innehåller allt som behövs. Om förutsättningarna är givna för alla inblandade kan den naturligtvis kortas ned, t.ex. om man är överens om hur beräkningarna ska göras och att alltid använda 95% konfidensnivå.

Enkel kokbok i mätosäkerhet

Vi sammanfattar det vi har gjort i följande ”kokbok” i mätosäkerhet:

1. Bestäm sambandet mellan utstorheten (mätstorheten) och alla instorheter som kan påverka den.
2. Skatta värden på alla instorheter.
3. Skatta värdet på instorheternas standardosäkerheter, antingen med statistisk analys av en mätserie (Typ A) eller på annat sätt (Typ B).
4. Beräkna värdet på utstorheten.
5. Bestäm känslighetsfaktorn som hör till varje instorhet.
6. Beräkna utstorhetens sammanlagda standardosäkerhet.
7. Ta fram en täckningsfaktor som svarar mot en vald konfidensnivå.
8. Beräkna den utvidgade mätosäkerheten.
9. Rapportera mätresultatet tillsammans med utvidgad mätosäkerhet och dess konfidensnivå.

Slutord

Detta exempel innehåller inte alla aspekter på bestämning och redovisning av mätosäkerhet.

- Här har bara berörts *Typ A bestämning av standardosäkerhet*, dvs. skattning genom statistisk analys av en mätserie. Alla andra sätt benämns *Typ B*. De kan t.ex. vara resultat från andra mätningar, värden från fabrikanternas specifikationer eller från oberoende kontrollmätningar etc.
- Någon analys av ev. korrelation mellan mätningar har inte genomförts. En sådan korrelationsanalys kan vara rätt omfattande och i viss mån komplicera beräkningarna.
- Det finns fler metoder för beräkning av sammanlagd och utvidgad mätosäkerhet, t.ex. numerisk derivering och Monte Carlo-simulering.
- Normalfördelning/t-fördelning – eller approximationer av sådana – fungerar vanligen, men ibland behöver även andra fördelningar beaktas. GUM nämner t.ex. rektangel- och triangelformade fördelningar.

Föreliggande framställning bedöms dock räcka ganska långt – åtminstone är den förhoppningsvis en inkörsport till mer raffinerade GUM-analyser.

/Clas-Göran Persson