



Lantmäteriet
Lantmäteriverket - National Land Survey
S - 801 12 GÄVLE · SWEDEN

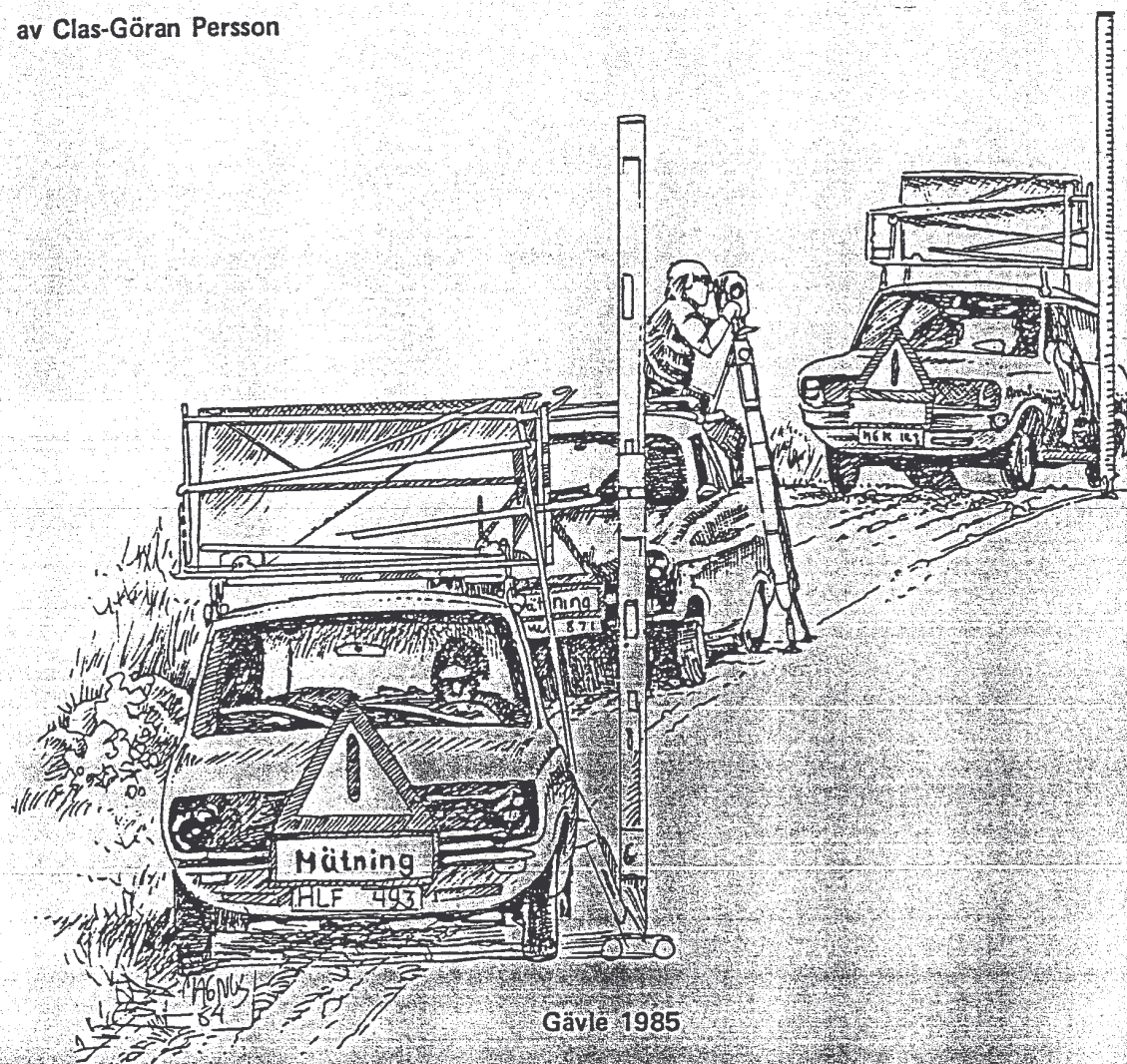
Tekniska skrifter - Professional Papers

LMV-RAPPORT 1985:2

ISSN 0280-5731

Några enkla metoder för noggrannhetsanalys av avvägningsnät

av Clas-Göran Persson



Gävle 1985



Titel

NÅGRA ENKLA METODER FÖR NOGGRANNHETS-
ANALYS AV AVVÄGNINGSNÄT

Huvudinnehåll

I rapporten presenteras ett antal metoder för noggrannhetsanalys vid avvägning. De är framtagna främst med tanke på riksavvägningen, men teorin är generell och tillämpbar även i andra sammanhang.

Clas-Göran Persson

Clas-Göran Persson

KG - Geodetiska Ut-
vecklingsenheten

Utarbetande av tekniska rapporter ingår som ett led i den s k Samhällsmättningsfunktionens verksamhet. Tillkomsten av denna funktion är ett uttryck för en ökad satsning på samhällsmätning vid LMV. Den utgörs av de enheter som har sitt verksamhetsfält inom detta område, och har som sin huvudsakliga uppgift att samordna och befrämja metodutveckling samt informera om metoder och instrument.

LDOK

Kg Mätningsteknik Stommätning

Beställs hos

Lantmäteriverket
Blankettförrådet
801 12 GÄVLE

Liber Förlag



INNEHÅLLSFÖRTECKNING

BAKGRUND OCH SYFTE	1
GRUNDLÄGGANDE BEGREPP	2
Fel av första och andra slaget Viktsättning och grundmedelfel	
FELSÖKNING FÖRE UTJÄMNING	4
Test av slutningsfel i avvägningsslingor Undre gränsen för upptäckbara grova fel Sannolikheten att upptäcka ett fel av given storlek	
ANALYS AV UTJÄMNINGSRESULTAT	7
En viktig hjälpstorhet Den synliga delen av ett grovt fel Ett grovt fels påverkan på utjämningsresultatet Medelfelet i en utjämnad höjdskillnad	
FELSÖKNING I SAMBAND MED UTJÄMNING - SOM ALTER- NATIV ELLER KOMPLEMENT	12
Data-snooping Upptäckbara fel Sannolikheten att hitta ett givet fel Kvarstående fels påverkan	
ETT NUMERISKT EXEMPEL	17
NÅGRA KOMMENTARER	26
Simulering - Överslagsformler Graden av approximation Andra typer av tester	
SAMMANSTÄLLNING AV ANALYSFÖRFARANDET	30

BAKGRUND OCH SYFTE

I rapporten presenteras ett antal metoder för att analysera noggrannheten i avvägningarnät. De är främst avsedda för analyser av precision och tillförlitlighet vid den nu pågående riksavvägningen - som ett komplement till det där använda utjämningsprogrammet, vilket inte redovisar någon sådan information. Metodiken är också tänkt att användas i det nya beräkningsprogram som är under utveckling vid LMV. Teorin är dock generell och allmänt tillämpbar för studier av avvägningarnät.

Tekniken bygger till stor del på förenklingar av den holländske geodeten Baardas metoder, som där med framgång har tillämpats i mer än 15 år. Metoderna vilar på en relativt komplicerad statistisk grund - något som användaren dock inte behöver bekymra sig om, och som här inte redovisas i detalj.

Beträffande beteckningarna bör observeras att H genomgående står för höjdskillnad. Den vanliga beteckningen ΔH kolliderar nämligen med den i dessa sammanhang vedertagna beteckningen ∇ som används för olika statistiska storheter.

GRUNDLÄGGANDE BEGREPP

Fel av första och andra slaget

Analysen genomförs delvis som konventionell hypotesprövning. För att skapa större förståelse för detta förfarande ges inledningsvis två grundläggande definitioner:

- Att begå ett fel av första slaget innebär i detta sammanhang att förkasta en avvägning som inte innehåller något grovt fel, dvs att man felaktigt beordrar ommätning.
- Ett fel av andra slaget begår man om man accepterar ett mätmaterial som är behäftat med grovt fel.

Sannolikheten för fel av första slaget, den s k risknivån α , bör vara mycket liten. Standardmässigt tillämpas α -värden på 5, 1 eller 0,1%. Det innebär att man löper mycket liten risk att onödigtvis begära ommätning. (Obs att mindre α -värden innebär mildare krav.)

Beträffande sannolikheten för fel av andra slaget, betecknad β , är man något generösare. Statistisk praxis är $\beta = 10, 20$ eller 30% . (Mindre β -värden innebär strängare krav.)

Viktsättning och grundmedelfel

Vid utjämning av avvägningsnät beräknas vanligen vikten P_i för ett tåg, dvs en avvägningslinje mellan två knutpunkter, som

$$P_i = \frac{1}{d_i} \quad (1)$$

där

$$d_i = \text{tågets längd} \quad [\text{km}]$$

Vikter beräknade på detta sätt förutsätts i det följande.

Grundmedelfelet σ_0 , ett referensvärde som anger medelfelet för ett tåg med vikten ett, kan antingen ansättas a priori på grundval av tidigare erfarenheter, eller också, om antalet överbestämningar är stort, beräknas i samband med utjämnningen. Det ger alltså medelfelet för ett enkel- eller dubbelmätt 1 km-tåg beroende på vilken mätprincip som tillämpas. Blandning av enkel- och dubbelmätning förutsätts inte förekomma.

Vi kommer här att använda a priori grundmedelfel med ett enda undantag: beräkning av medelfel i utjämnade höjdskillnader enligt formel (14). Kunskapen om mätprecisionen måste dock vara så god att det inte är någon större skillnad mellan det skattade σ_0 och a priorivärdet, och beteckningens mässigt skiljer vi därför inte på de två.

Ett enkelt sätt att skaffa sig ett apriorivärde är att ta det värde som anges i TFA för den aktuella tillämpningen. Eftersom TFA-värdet är en övre gräns för grundmedelfelet blir det dock i regel för stort, vilket ger alltför okänsliga tester. Detta tillvägagångssätt bör därför användas endast i undantagsfall. Helst bör man försöka ange ett mer realistiskt värde ($<TFA$).

FELSÖKNING FÖRE UTJÄMNING

Test av slutningsfel i avvägningsslingor

Den enklaste felsökningsmetoden före utjämning är beräkning av motsägelser i slutna avvägningsslingor och tåg mellan kända punkter.

Under antagande om normalfördelade mätfel accepteras slingor som uppfyller

$$|W_j| \leq \lambda_{\alpha/2} \sigma_o \sqrt{S_j} \stackrel{\Delta}{=} C_w \quad (2)$$

där

W_j = slutningsfelet [mm]

α = den risknivå som man bestämt sig för

$\lambda_{\alpha/2}$ = $\alpha/2$ -kvantilen för den standardiserade normalfördelningen
(konstant för vald risknivå)

σ_o = grundmedelfelet [mm/ $\sqrt{\text{km}}$]

S_j = $\sum d_i$, dvs summa längder för de tåg som ingår i slingan [km]

C_w = tillåtet slutningsfel (det "kritiska" värdet) [mm]

Lämpliga $\lambda_{\alpha/2}$ -värden ges av:

α	$\lambda_{\alpha/2}$
5 %	1.96
1 %	2.58
0.1 %	3.29

(3)

Om slutningsfelet är för stort misstänks grovt fel i något av de ingående tågen. Man får då försöka lokalisera felet genom beräkning av närliggande slingor och åtgärda det på lämpligt sätt.

Undre gränsen för upptäckbara grova fel

Hur stort måste då ett grovt fel vara för att man ska ha en rimlig chans att upptäcka det på detta sätt? Gränsvärdet $\nabla_0 l_j$ för det minsta upptäckbara felet (MUF) i en slinga kan beräknas om man också bestämmer sig för sannolikheten β för fel av andra slaget. Vi får då:

$$\nabla_0 l_j = \delta_0 \sigma_0 \sqrt{S_j} \quad (4)$$

där

$$\delta_0 = \delta_0(\alpha, \beta) = \lambda_{\alpha/2} + \lambda_{1-\beta}$$

och ges av nedanstående tabell:

δ_0		β		
		30%	20%	10%
α	$\lambda_{\alpha/2}$	$\lambda_{1-\beta}$		
5%	1.96	0.52	0.84	1.28
1%	2.58	2.48	2.80	3.24
0.1%	3.29	3.10	3.42	3.86
		3.81	4.13	4.57

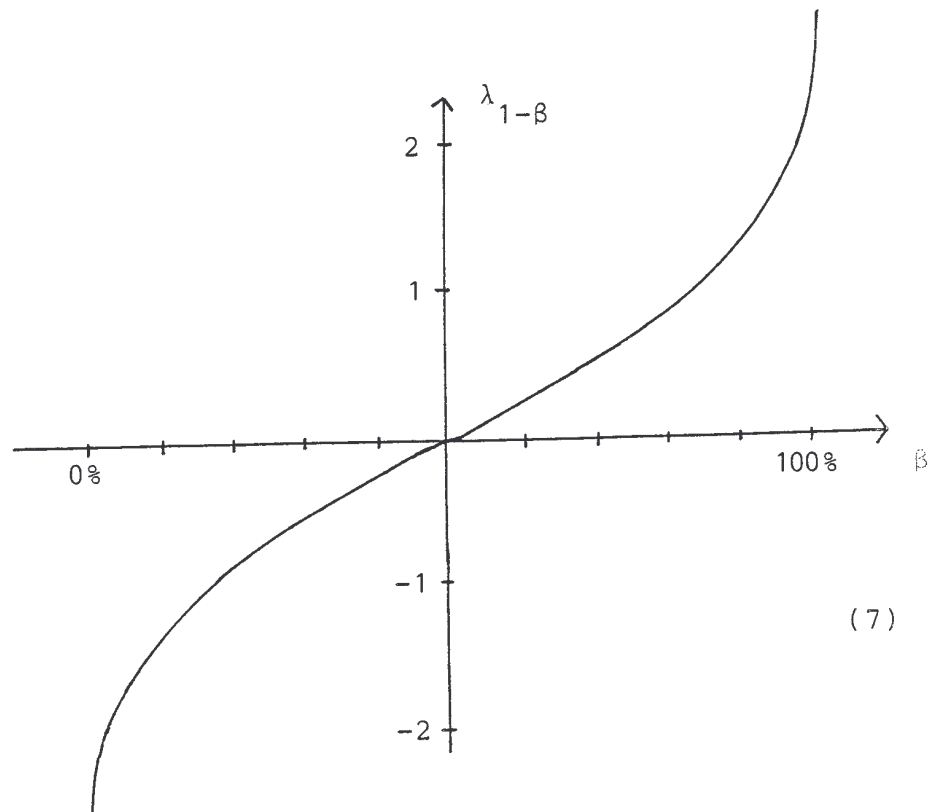
(5)

Sannolikheten att upptäcka ett fel av given storlek

Omvänt kan man räkna ut hur stor sannolikheten är för att man på den aktuella risknivån α ska upptäcka ett givet fel ∇l_j i en slinga. Först beräknas $\lambda_{1-\beta}^*$ ur

$$\lambda_{1-\beta}^* = \frac{\nabla l_j}{\sigma_0 \sqrt{S_j}} - \lambda_{\alpha/2} \quad (6)$$

varefter sannolikheten β^* erhålls grafiskt ur nedanstående figur. (Obs att β anger sannolikheten att upptäcka felet - dessutom måste det lokaliseras till rätt tåg i slingan.)



ANALYS AV UTJÄMNINGSRESULTAT

Sedan grova fel i möjligaste mån har eliminerats enligt den princip som angetts i föregående avsnitt, övergår man till utjämningsnätet. I samband därmed bör dessutom nätets kvalitet bestämmas genom analys av dess precision och tillförlitlighet. (Det finns också möjligheter till fortsatt felsökning, vilket dock behandlas i nästa kapitel.)

Precisionen uttrycks lämpligen som medelfel i utjämnade höjdskillnader, som ger en bättre beskrivning av den typ av kvalitet som en användare är intresserad av än vad de vanligen använda medelfelen i utjämnade höjder gör.

Tillförlitligheten beskrivs med mått som anger eventuella kvarstående grova fels maximala storlek och påverkan på nätutjämningsnätet.

Den analysmetodik som hittills har beskrivits är fri från approximationer. De metoder som ges i det följande kommer emellertid att innehålla en hel del förenklingar. Detta dels för att analysen inte ska kräva en orimlig beräkningsinsats, dels för att den ska gå att använda i redan befintliga program, vilka vanligen inte ger de storheter som behövs för en strikt studie.

Statistiska tester är dock förenade med så pass mycket godtycke, t ex valet av sannolikhetsnivåerna α och β , att (rimliga) approximationer inte innebär någon märkbar försämring.

En viktig hjälpstorhet

I approximationerna är följande hjälpstorhet av fundamental betydelse.

$$D = \frac{m}{\bar{o}} \bar{d} \quad (8)$$

där

m = antalet knutpunkter (obekanta)

\bar{o} = antalet överbestämningar (tåg - knutar)

\bar{d} = genomsnittliga tåglängden i
nätet [km]

Storheten D är en form av referensavstånd. Om man följer "god utjämningsed" och har en överbestämning per obekant knutpunkt är D helt enkelt den genomsnittliga tåglängden.

Den synliga delen av ett grovt fel

En annan viktig storhet, specifik för varje avvägningståg, är:

$$r_i \approx \frac{d_i}{d_i + D} \quad (9)$$

där

r_i = den aktuella mätningens andel
av det totala antalet överbestämningar i nätet

d_i = tåglängden

Denna storhet anger approximativt hur mycket av ett grovt fel ∇l_i som "syns" i motsvarande förbättring V_i , dvs

$$-V_i \approx r_i \nabla l_i \approx \frac{d_i \nabla l_i}{d_i + D} \quad (10)$$

Eftersom $r_i \leq 1$ kommer endast en del av felet att uppträda i förbättringen, och V_i brukar därför kallas för "den synliga delen" av felet.

Ovanstående innebär att i t ex ett (bra) triangelnät med $r_i \geq 0.5$ är det bakomliggande felet ungefär dubbelt så stort som förbättringen. I ett polygonnät å andra sidan är $r_i \approx 0.1$, och felet alltså av storleksordningen 10 gånger förbättringen. Avvägningsnät typ riksavvägningen ligger någonstans mitt emellan med en faktor ~ 3 mellan förbättring och grovt fel.

Ett grovt fels påverkan på utjämningsresultatet

Den del av det grova felet som inte uppträder som förbättring kommer i stället att påverka utjämningsresultatet. Det fel som ett givet fel ∇l_i i ett tåg ger i motsvarande utjämnade höjdskillnad H_i blir därför:

$$\nabla H_i \approx (1 - r_i) \nabla l_i \approx \frac{D \nabla l_i}{d_i + D} \quad (11)$$

Med användande av gränsvärdena $\nabla_o l_j$ från föregående kapitel erhålls på motsvarande sätt formeln:

$$\nabla_o H_i \approx (1 - r_i) \nabla_o l_j \approx \frac{D \nabla_o l_j}{d_i + D} \quad (12)$$

eller med uttrycket (4) för $\nabla_o l_j$ insatt:

$$\nabla_o H_i \approx \frac{\delta_o \sigma_o D \sqrt{S_j}}{d_i + D} \quad (13)$$

för den påverkan som ges av det minsta fel (MUF) som kan upptäckas genom test av slutningsfelet

i motsvarande slinga. $\nabla_{\circ} H_i$ är alltså gränsvärdet för den effekt av ett oupptäckt grovt fel som vi riskerar att få kvar i H_i efter utjämning. $\nabla_{\circ} H_i$ gäller för givna α och β : Om vi testar på nivån α är sannolikheten β att vi får ett kvarstående grovt fel i H_i som är större än $\nabla_{\circ} H_i$.

Detta gränsvärde kan därför användas som mått på tillförlitligheten - eller mer korrekt, med det språkbruk som tillämpas i dessa sammanhang, på den yttre tillförlitligheten. (De minsta upptäckbara felen själva brukar användas för att karaktärisera den inre tillförlitligheten.)

Medelfelet i en utjämnad höjdskillnad

Även medelfelen i de utjämnade höjdskillnaderna kan approximativt skattas med hjälp av storheten D . Vi har efter utjämning följande uttryck för medelfelet σ_{H_i} i höjdskillnaden H_i :

$$\sigma_{H_i} = \sigma_{\circ} \sqrt{(1-r_i)d_i} \approx \sigma_{\circ} \sqrt{\frac{d_i D}{d_i + D}} \quad (14)$$

(Härur kan även medelfelet i en del av ett tåg, t ex i ett fixhåll, beräknas med "medelfelets fortplantningslag".)

En mycket intressant storhet är kvoten

$$\nabla_{\circ} H_i / \sigma_{H_i} \approx \delta_{\circ} \sqrt{\frac{D}{d_i}} \sqrt{\frac{S_j}{d_i + D}} \quad (15)$$

beräknad ur formlerna (13-14), vilken anger $\nabla_{\circ} H_i$ i multiplar av motsvarande medelfel σ_{H_i} , dvs ställer yttre tillförlitligheten i relation

till nätets precision. Denna kvot bör egentligen vara mindre än 3, jfr det så kallade "3 σ -kriteriet" för tolererbara grova fel, men detta kan vara svårt att uppnå i praktiken.

Tillsammans ger storheterna i formlerna (13-15) en mer komplett beskrivning av ett näts noggrannhet än de vanligen använda kvalitetsmått.

FELSÖKNING I SAMBAND MED UTJÄMNING - SOM ALTERNATIV ELLER KOMPLEMENT

Data-snooping

Den ovan beskrivna metodiken utgör i och för sig ett komplett analyssystem - inkluderande kontroll av mätdata och instrument för bedömning av slutresultatets kvalitet. Det finns emellertid också möjlighet att söka grova fel i samband med nätutjämnings. Metoden kallas data-snooping och har sitt ursprung i Holland. Den bygger på analys av de beräknade tågförbättringarna i stället för slutningsfel i avvägningsslingor.

Tekniken påminner annars om det förfarande som tidigare har beskrivits. Formlerna för såväl test som tillförlitlighetsanalys är snarlika. Vi har valt att presentera metoden i ett separat kapitel för att markera att det är en valfri utvidgning. Den bör betraktas som ett komplement snarare än som ett alternativ, dvs felsökning ska helst ske såväl före som i samband med utjämnings.

För att det ska gå att skilja på mätfel och eventuella fel i höjderna på de kända (fasta) punkterna bör man i första analysomgången endast låsa höjden på en punkt. Först sedan resultatet därifrån har accepterats sker den slutgiltiga utjämnings med alla kända punkter fasta. Problem som endast uppkommer i den senare fasen kan då i regel hänföras till grova fel i utgångshöjderna.

Samtliga förbättringar analyseras. För att ett tåg ska accepteras måste motsvarande förbättring uppfylla (jfr (2)):

$$\left| \frac{V_i}{r_i} \right| \leq \lambda_{\alpha/2} \sigma_0 \sqrt{d_i + D}$$



$$|V_i| \lesssim \frac{\lambda_{\alpha/2} \sigma_0 d_i}{\sqrt{d_i + D}} \triangleq C_v \quad (16)$$

Tåg med större förbättringar rättas till, tas bort eller mäts om, varefter utjämnningen görs om. (Alternativt åtgärdas varje gång endast det tåg som mest överskrider sitt C_v -värde.) Förfarandet upprepas tills samtliga data kan accepteras.

Under analysskedet kan det vara klokt att isolera ett fel i taget genom att successivt eliminera de tåg som felflaggas, eller att prova att utesluta misstänkta tåg i alla tänkbara kombinationer och studera hur övriga tåg påverkas. Detta för att undvika felaktiga slutsatser, särskilt då flera fel förekommer samtidigt.

I avvägningssammanhang går det dock vanligen inte att utesluta något tåg ur den slutgiltiga utjämnningen, eftersom man då inte får fram några höjder i det området. Kan inte orsaken till felet hittas och om det blir för dyrt att mäta om, återstår endast att låta tåget kvarstå och i redovisningen markera var problemet ligger. Felets storlek kan t ex uppskattas med hjälp av (10):

$$\widehat{v}_i \approx \frac{-V_i}{r_i} \approx - \frac{V_i (d_i + D)}{d_i} \quad (17)$$

och dess påverkan på motsvarande höjdskillnad H_i med (11):

$$\widehat{V}H_i \approx (1 - r_i)\widehat{V}l_i \approx -\frac{D}{d_i} V_i \quad (18)$$

Som framgår av (16) kan data-snooping härledas direkt ur formel (2) genom substitutionerna

$$W_j \longrightarrow \frac{-V_i}{r_i} \quad (19)$$

$$S_j \longrightarrow d_i + D \quad (20)$$

Denna testmetod kan alltså vid analys av avvägningarnät betraktas som test av fiktiva slingor med längden $d_i + D$. Detta förutsatt att förbättringen, den synliga delen av felet, konverteras till "slutningsfel" med hjälp av (19). Erfarenheten visar att $d_i + D$ vanligen är mindre än S_j , vilket innebär att data-snooping ger en säkrare detektering av grova fel och alltså en bättre tillförlitlighet. Dessutom kan det felaktiga tåget i regel lokaliseras. Två grova fel i närliggande tåg kan dock ibland detekteras på ett bättre sätt genom beräkning av slutningsfel i slingor. Båda metoderna har alltså sitt berättigande.

Upptäckbara fel

Övriga formler erhålls också direkt ur tidigare givna uttryck genom substitutionen (20). De redovisas nedan i tur och ordning.

I analogi med (4) blir gränsvärdet $\nabla_{oo}l_i$ för det minsta grova fel (MUF) som, för givna α och β , kan detekteras med data-snooping:

$$\nabla_{oo}l_i \approx \delta_o \sigma_o \sqrt{d_i + D} \quad (21)$$

som är mindre än $\nabla_0 l_i$ om $d_i + D < S_j$,
och alltså verifierar att denna metod medför
en bättre inre tillförlitlighet.

Sannolikheten att hitta ett givet fel

Vidare kan sannolikheten β^{**} för att man på den
aktuella α -nivån ska hitta ett grovt fel ∇l_i av
given storlek med data-snooping uppskattas genom
att beräkna

$$\lambda_{1-\beta^{**}} = \frac{\nabla l_i}{\sigma_0 \sqrt{d_i + D}} - \lambda_{\alpha/2} \quad (22)$$

och sedan ta ut β^{**} grafiskt ur figur (7). Denna
sannolikhet är i regel större än den i formel (6)
givna motsvarigheten.

Kvarstående fels påverkan

Det fel som ett givet fel i ett tåg ger i mot-
svarande utjämnade höjdskillnad beräknas som förut
med hjälp av (11).

Med användande av gränsvärdena $\nabla_{00} l_i$ erhålls
analogt måttet

$$\nabla_{00} H_i \approx \frac{\delta_0 \sigma_0 D}{\sqrt{d_i + D}} \quad (23)$$

på den maximala effekt av ett oupptäckt grovt fel som
vi, för givna α och β , riskerar att få kvar i motsva-
rande utjämnade höjdskillnad — jfr (13).

Kvoten mellan $\nabla_{00} H_i$ och den utjämnade höjdskill-
nadens medelfel σ_{H_i} , beräknad med (14), blir
slutligen

$$\nabla_{\sigma_{H_i}} H_i / \sigma_{H_i} \approx \delta_o \sqrt{\frac{D}{d_i}} \quad (24)$$

och en jämförelse med (15) ger direkt att data-snooping också åstadkommer en bättre yttre tillförlitlighet.

I resultatredovisningar bör alltid ingå uppgifter om såväl nätets precision som dess inre och yttre tillförlitlighet. För att ge exempel på hur detta kan ske, och för att åskådliggöra testförfarandet, ges en numerisk tillämpning i nästa kapitel.

ETT NUMERISKT EXEMPEL

Följande exempel är hämtat från den pågående riksavvägningen (polygon 6; N. Småland/Östergötland).

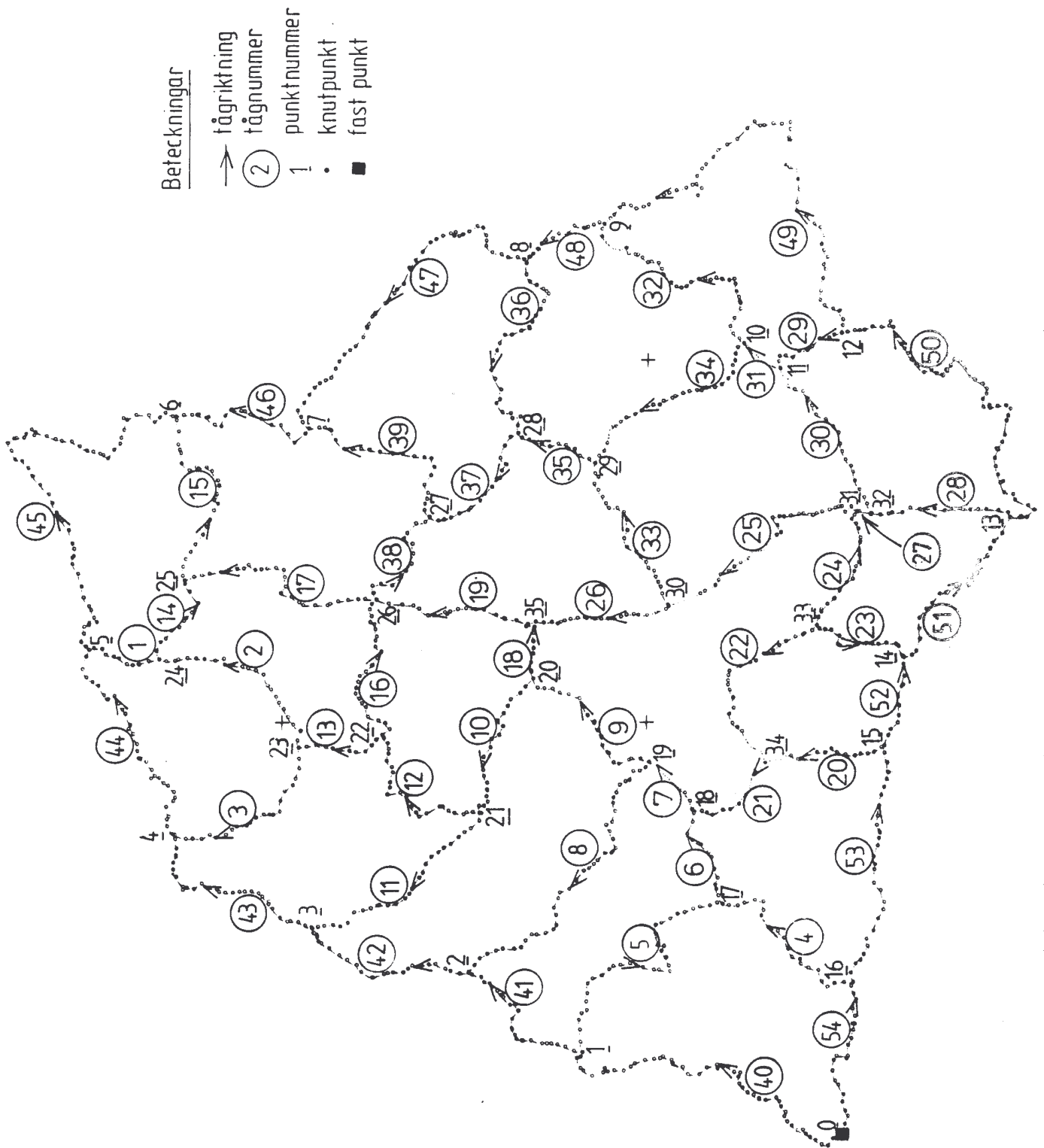
Nätutformningen framgår av figur 1. Beteckningarna är dock specifika för detta exempel. De överensstämmer ej med de som används officiellt. Grundmedelfelet vid riksavvägningen har erfarenhetsmässigt visat sig ligga kring $1\text{mm}/\sqrt{\text{km}}$, och detta värde används därför i det följande. Fri nätutjämnning tillämpas, dvs det finns endast en fast punkt - nummer 0 i det sydvästra hörnet. (Problemet med nätets anslutning till högre ordningens punkter berörs alltså ej .) Övriga storheter av intresse är

$$\begin{aligned} m &= \text{antal knutpunkter} = 35 \\ n &= \text{antal tåg} = 54 \\ \ddot{o} &= n - m = \text{antal överbestämningar} = \\ &\quad \text{antal slingor} = 19 \\ \bar{d} &= \text{genomsnittlig tåglängd} = 21.8 \text{ km} \end{aligned}$$

I hypotestesterna används primärt risknivån $\alpha \approx 5\%$ ($\lambda_{\alpha/2} = 2.0$), och "tillåtet" värde beräknas utgående från denna. Tester med $\alpha \approx 1\%$ och $\alpha \approx 0.1\%$ genomförs emellertid simultant med hjälp av nedanstående beteckningssystem:

- * = överskridande av tillåtet värde ($\alpha \approx 5\%$)
- ** = överskridande av 4/3 av tillåtet värde ($\alpha \approx 1\%$)
- *** = överskridande av 5/3 av tillåtet värde ($\alpha \approx 0.1\%$)

Alla teststorheter som indikeras med dessa s k felflaggor måste undersökas närmare. Om inget fel står att finna, får man överväga om motsvarande mätning ändå kan ingå i utjämnningen eller om en ommätning är nödvändig.



Figur 1 Nätsskiss - riksavvägningen, polygon 6

Följande "tolkningsnyckel" kan då vara till hjälp:

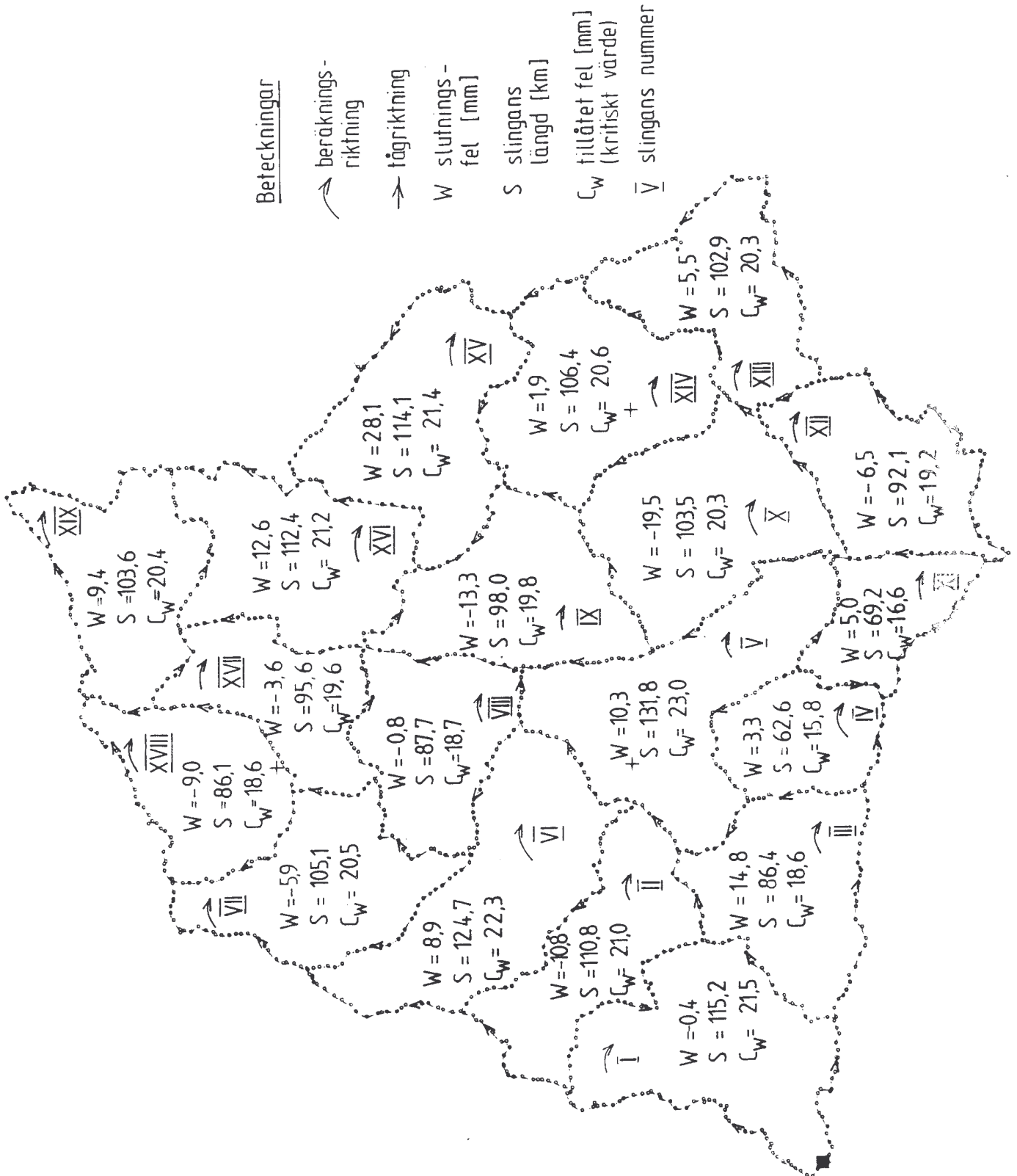
- * = kan kvarstå, trots felet.
- ** = kan kvarstå om dess påverkan på utjämningsresultatet är av rimlig storlek.
- *** = bör endast i undantagsfall kvarstå; ommätning rekommenderas.

Märk dock att testmetodiken fortfarande får anses vara på utvecklingsstadiet, varför det slutgiltiga valet av förkastelsegränser tills vidare får anstå.

Analysen inleds med test av slutningsfel i avvagnings-slingor. Slutningsfelen redovisas i figur 2 och testresultatet i tabell 1. Som framgår klarar samtliga slingor kraven så när som på nr XV. Eftersom alla tåg i denna slinga utom nr 47 ingår i andra (godkända) slingor, misstänks grovt fel i detta tåg. En närmare undersökning av tåget ger dock ingen förklaring. Med hänsyn till graden av överskridande (*) får det därför kvarstå till fas 2, där dess konsekvens på utjämningsresultatet kan analyseras närmare.

I den andra fasen utjämnas nätet, varefter de beräknade tågförbättringarna analyseras med data-snooping. Analysresultatet redovisas i tabell 2 tillsammans med medelfelen i de utjämnade höjdskillnaderna (σ_{H_i}).

Det kvadratiske medeltalet av σ_{H_i} = 3.6mm, men de individuella värdena, och alltså nätets precision, varierar beroende på tågens längd. På grund av utjämnningen varierar dock nätprecisionen mindre än mätprecisionen, dvs σ_i (se fig. 3).



Figur 2 Slutningsfel i avvägningsslingor

Slinga nr	Ingående tåg	S_j [km]	Erhållet W_j [mm]	Tillåtet C_w [mm]
I	④⑩ + ⑤ - ④ - ⑤④	115.2	-0.4	21.5
II	④① - ⑧ - ⑦ - ⑥ - ⑤	110.8	-10.8	21.0
III	④ + ⑥ - ②① - ②① - ⑤③	86.4	14.8	18.6
IV	②① - ②② + ②③ - ⑤②	62.6	3.3	15.8
V	⑦ + ⑨ + ①⑧ - ②⑥ - ②⑤ - ②④ + ②② + ②①	131.8	10.3	23.0
VI	④② - ①① - ①① - ①① + ①①	124.7	8.9	22.3
VII	④③ - ③ - ①③ - ①② + ①①	105.1	-5.9	20.5
VIII	①② + ①⑥ - ①⑨ - ①⑧ + ①①①	87.7	-0.8	18.7
IX	②⑥ + ①⑨ + ③⑧ - ③⑦ - ③⑤ - ③③	98.0	-13.3	19.8
X	③③ - ③④ - ③① - ③① - ②⑦ + ②⑤	103.5	-19.5	20.3
XI	②④ + ②⑦ - ②⑧ - ⑤① - ②③	69.2	5.0	16.6
XII	②⑧ + ③① - ②⑨ - ⑤①	92.1	-6.5	19.2
XIII	③① + ③② - ④⑨ + ②⑨	102.9	5.5	20.3
XIV	③⑤ - ③⑥ - ④⑧ - ③② + ③④	106.4	1.9	20.6
XV	③⑨ - ④⑦ + ③⑥ + ③⑦	114.1	28.1	>21.4 *
XVI	①⑦ + ①⑤ - ④⑥ - ③⑨ - ③⑧	112.4	12.6	21.2
XVII	①③ + ② + ①④ - ①⑦ - ①⑥	95.6	-3.6	19.6
XVIII	④④ - ① - ② + ③	86.1	-9.0	18.6
XIX	① + ④⑤ - ①⑤ - ①④	103.6	9.4	20.4

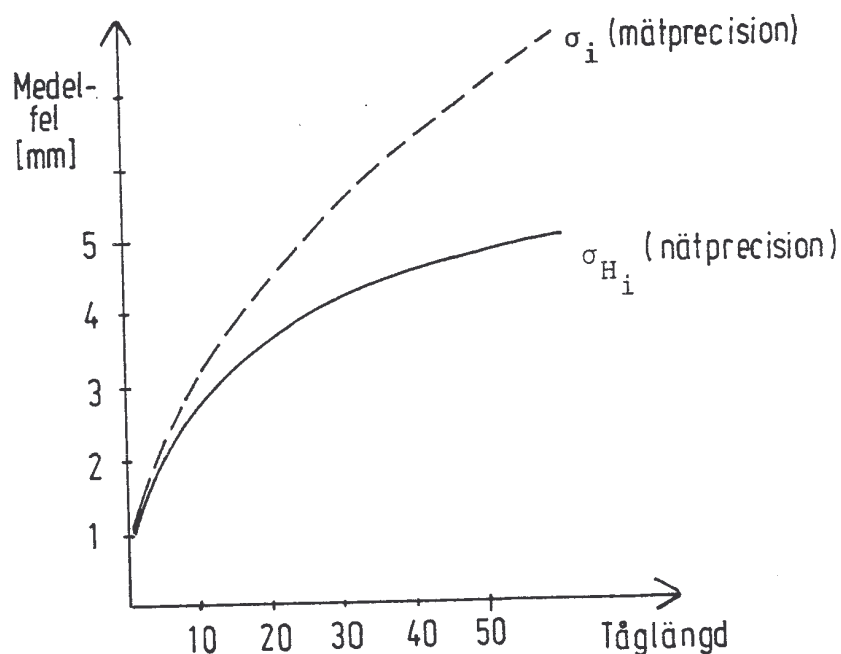
Tabell 1 Test av slutningsfel i avvägningsslingor.

(ovan) $C_w = 2\sqrt{S_j}$, jfr (2) ($\alpha \approx 5\%$)

Tabell 2 Redovisning av nätets precision; medelfel i utjämnade höjdskillnader, samt test av grova fel med data-snooping.

(nästa sida) $c_v = 2 d_i / \sqrt{d_i + D}$, jfr (16) ($\alpha \approx 5\%$)

Tåg nr	d_i [km]	σ_{H_i} [mm]	r_i	Erhållet V_i [mm]	Tillåtet C_v [mm]
1	8.4	2.6	0.173	-2.0	2.4
2	24.0	3.9	0.374	-2.5	6.0
3	22.2	3.8	0.356	0.9	5.6
4	20.7	3.7	0.340	-4.0	5.3
5	31.9	4.2	0.442	-2.0	7.5
6	13.0	3.1	0.244	-3.3	3.6
7	7.0	2.4	0.148	-1.0	2.0
8	37.7	4.4	0.484	-3.7	8.5
9	19.7	3.6	0.329	-0.9	5.1
10	20.3	3.7	0.335	1.6	5.2
11	25.6	4.0	0.389	3.3	6.3
12	21.7	3.8	0.350	-1.1	5.5
13	10.6	2.9	0.209	-0.7	3.0
14	12.6	3.1	0.239	1.7	3.5
15	25.5	4.0	0.388	-1.7	6.3
16	21.4	3.7	0.348	0.3	5.5
17	26.5	4.0	0.397	-5.3	6.5
18	6.9	2.4	0.147	-0.9	2.0
19	17.4	3.5	0.302	0.9	4.6
20	16.2	3.4	0.287	0.7	4.3
21	11.9	3.0	0.228	1.4	3.3
22	24.9	3.9	0.383	1.7	6.2
23	13.3	3.2	0.249	-0.9	3.6
24	16.3	3.4	0.288	0.0	4.3
25	28.1	4.1	0.411	7.8	>6.8 *
26	16.9	3.5	0.296	3.0	4.5
27	0.9	0.9	0.021	-0.2	0.3
28	16.6	3.4	0.293	3.2	4.4
29	10.0	2.8	0.199	-1.4	2.8
30	21.4	3.7	0.348	-1.9	5.5
31	5.0	2.1	0.111	-1.1	1.5
32	30.6	4.2	0.432	0.2	7.3
33	21.2	3.7	0.345	2.2	5.4
34	26.8	4.0	0.400	-6.3	6.6
35	9.6	2.8	0.194	-1.3	2.7
36	28.0	4.1	0.411	-6.5	6.8
37	17.4	3.5	0.302	-6.3	>4.6 **
38	15.4	3.3	0.277	4.1	4.1
39	24.8	3.9	0.382	-2.4	6.2
40	41.9	4.5	0.510	-1.1	9.3
41	21.2	3.7	0.345	0.8	5.4
42	21.4	3.7	0.347	-1.3	5.5
43	25.0	3.9	0.384	1.7	6.2
44	31.4	4.2	0.438	3.5	7.4
45	57.1	4.9	0.587	-7.4	11.6
46	19.8	3.6	0.330	3.9	5.1
47	43.8	4.6	0.521	12.8	>9.6 *(*)
48	11.3	3.0	0.219	0.7	3.1
49	57.3	4.9	0.587	3.1	11.6
50	44.1	4.6	0.523	-3.8	9.6
51	22.1	3.8	0.355	2.4	5.6
52	8.2	2.6	0.170	1.4	2.4
53	24.7	3.9	0.380	5.4	6.1
54	20.7	3.7	0.340	0.5	5.3



Figur 3 Precisionen före och efter utjämning

Återigen felflaggas tåg nr 47, och nu även tågen 25 och 37. Ingen orsak till någon av felaktigheterna kan dock påvisas. För att studera följdverkningarna av att trots allt låta dessa tåg kvarstå, uppskattas därför storleken på de bakomliggande felens $\widehat{\nabla l}_i$ och de fel $\widehat{\nabla H}_i$ i de utjämnade höjdskillnaderna som dessa ger. Det sker med hjälp av formlerna (17) respektive (18), och skattningarna redovisas i tabell 3. $\widehat{\nabla H}_i$ relateras där också till motsvarande precisionsmått, dvs till σ_{H_i} .

Tåg nr	$\widehat{\nabla l}_i$ [mm]	$\widehat{\nabla H}_i$ [mm]	σ_{H_i} [mm]	$ \widehat{\nabla H}_i /\sigma_{H_i}$
25	-19	-11	4.1	2.7
37	+21	+15	3.5	4.2
47	-25	-12	4.6	2.6

Tabell 3 Uppskattade fel i de tåg som förkastas vid data-snooping, samt dessa fels påverkan på utjämningsresultatet.

I tabell 4 ges mått på den inre och yttre tillförlitligheten - dvs på hur små grova fel som kan detekteras och hur de fel som ej kan upptäckas påverkar resultatet. Dessa storheter är ofta så pass homogena i ett nät, att det räcker att redovisa medeltalen. För att verifiera detta ges i tabellen också standardavvikelserna.

Storhet	Test av slutningsfel		Data-snooping	
	\bar{x} [mm]	S [mm]	\bar{x} [mm]	S [mm]
Inre tillförlitligheten $\nabla_0 l_i$ alt. $\nabla_\infty l_i$ (MUF)	27	2.4	22	2.1
Yttre tillförlitligheten $\nabla_0 H_i$ alt. $\nabla_\infty H_i$	18	3.1	14	1.4

Tabell 4 Redovisning av medeltal (\bar{x}) och standardavvikelse (s) för de storheter som anger inre respektive yttre tillförlitligheten. ($\alpha=5\%$; $\beta=20\%$)

Den yttre tillförlitligheten ställd i relation till nätets precision visar vidare att

$$\begin{aligned}\nabla_0 H_i &\approx 5.6 \sigma_{H_i} \text{ (test av slutningsfel) och} \\ \nabla_\infty H_i &\approx 4.4 \sigma_{H_i} \text{ (data-snooping)}\end{aligned}$$

i genomsnitt - jfr (15) och (24). Märk dock att på grund av att $\nabla_0 H_i$ och $\nabla_\infty H_i$ är ungefär lika för samtliga tåg, oberoende av tåglängden, så kommer korta tåg relativt sett att ha en sämre tillförlitlighet.

Exempelvis är $\nabla_0 H_i = 19\sigma_{H_i}$ för tåg 27 som är kortast.

Av tillförlitlighetssiffrorna framgår först och främst att data-snooping är en effektivare felsökningsmetod än test av slutningsfel. Dessutom visar en jämförelse med tabell 3 att de felflaggade tågen 25, 37 och 47 bör kunna tas med i utjämningsplaneringen, eftersom storleken på felen och deras påverkan ligger i nivå med vad som gäller för tillförlitligheten i övriga delar av nätet.

Vi godkänner alltså mätmaterialiet i sin helhet, och ett sammanfattande omdöme om nätets tillförlitlighet är, att sannolikheten är liten för att det ska finnas kvar grova mätfel som är större än 2-3 cm. Det innebär i sin tur att grova fel i utjämnade höjdskillnader som är större än $1\frac{1}{2}$ cm - dvs 4-5 gånger motsvarande medelfel för medellånga tåg - är osannolika.

Allt detta gäller exakt endast under förutsättning att felen inte är av systematisk natur, utan slumpmässiga och någorlunda normalfördelade. Det är vid avvägning ibland ett tvivelaktigt antagande, och åtminstone svårt att kontrollera. Metoden innebär ändå en standardiserad felsökning, och möjlighet till en förbättrad kvalitetsbedömning.

NÅGRA KOMMENTARER

Simulering — överslagsformler

Eftersom formlerna för noggrannhetsuppskattning endast innehåller storheter som är mer eller mindre kända redan på planeringsstadiet — t ex tåglängder och mätprecision — kan de beräknas i ett tidigt skede, så att nätets precision och tillförlitlighet kan kontrolleras innan mätplanen och nätkonfigurationen definitivt fastläggs. Detta kallas simulering och är i princip en utjämning utan mätdata.

Vid avvägning räcker det dock vanligen att man grovt kontrollerar att ett planerat nät kommer att uppfylla ställda noggrannhetskrav. Då kan nedanstående överslagsformler vara användbara.

Genom att sätta tåglängden lika med den genomsnittliga tåglängden ($d_i = \bar{d}$) i uttrycken för precision och tillförlitlighet, får vi följande uppskattningar på medelvärdet av respektive storhet:

$$\widetilde{\sigma}_{H_i} \approx \sigma_o \sqrt{\frac{m \bar{d}}{n}}, \text{ jfr (14)} \quad (25)$$

$$\widetilde{\nabla_{oo}^1 i} \approx \delta_o \sigma_o \sqrt{\frac{n \bar{d}}{\ddot{o}}}, \text{ jfr (21)} \quad (26)$$

$$\widetilde{\nabla_{oo}^{H_i}} \approx \delta_o \sigma_o \sqrt{\frac{m^2 \bar{d}}{\ddot{o} n}}, \text{ jfr (23)} \quad (27)$$

och vidare

$$\widetilde{\nabla_{oo}^{H_i} / \sigma_{H_i}} \approx \delta_o \sqrt{\frac{m}{\ddot{o}}}, \text{ jfr (24)} \quad (28)$$

Överslagsformlerna ger snabbt och enkelt en uppfattning om ett planerat näts genomsnittliga noggrannhet.

Graden av approximation

Något bör väl också nämnas om den grad av approximation som den i denna rapport beskrivna, förenklade, analysmetoden innebär.

Det relativa medelfelet (RMS = root mean square error) i approximationen (9) av storheten r_i var i exemplet från riksavvägningen ca 15% — se föregående kapitel. Det ger i sin tur ett medelfel i de enskilda skattningarna av övriga storheter enligt tabell 5.

Approximerad storhet	Formel	Relativt medelfel
σ_{H_i}	(14)	5%
$\nabla_{00} l_i$	(21)	10%
$\nabla_{00} H_i$	(23)	15%
$\nabla_{00} H_i / \sigma_{H_i}$	(24)	15%

Tabell 5 Relativa approximationsmedelfel i noggrannhetsuppgifterna — riksavvägningen, polygon 6.

Detta får anses vara fullt acceptabelt — särskilt om man beaktar metodens enkelhet jämfört med en strikt beräkning. Också överslagsformlerna (25-28) är förvånansvärt exakta. De ger en nästan felfri skattning av den genomsnittliga noggrannheten.

Andra typer av tester

För att göra analysförfarandet helt komplett måste det utvidgas med ett fälttest, så att mätningarna kan kontrolleras en första gång direkt på platsen. Det vanligaste testet av denna typ är jämförelse mellan tur- och returmätning vid dubbelavvägning.

Det är svårt att sätta upp en statistisk modell för detta test — bl a beroende på komplicerade och delvis okända fysikaliska (mikrometereologiska) förhållanden. Följande felgränser har dock empiriskt visat sig ge ungefär 5% omavvägning, varför de kan anses vara kompatibla med en risknivå på $\alpha = 5\%$ för övriga tester. De är baserade på ett stort mätmaterial från riksavvägningen.

- . Omavvägning krävs om skillnaden mellan tur och retur i den första mätningen av det aktuella fixhållet överskrider

$$C_{tr} \triangleq 2 \sigma_0 \sqrt{a_i} \quad (29)$$

där

$$a_i = \text{avståndet mellan fixarna}$$

- . Om den andra mätningen, som också utförs som en fullständig tur- och returmätning, klarar kassationsgränsen (29) förkastas den första mätningen och omavvägningen används istället. Om inte heller den andra mätningen uppfyller kravet, beräknas medeltalen av tur- och returmätningarna — var för sig för de två första respektive de två andra enkelmätningarna. Ytterligare en omavvägning utförs om dessa medeltal skiljer sig mer än

$$C_{medel} \triangleq \sigma_0 \sqrt{a_i} \quad (30)$$

annars beräknas och används det totala medeltalet av alla fyra mätningarna.

- . Om den tredje tur- och returmätningen — den andra omavvägningen — klarar gränsen (29) används denna och de två första förkastas. I annat fall dokumenterar man svårigheterna och använder tills vidare medeltalet av samtliga utförda mätningar.

Detta test kan naturligtvis endast användas vid dubbelmätning. Vid enkelmätning får man nöja sig med de tidigare beskrivna testerna. Förfarandet kräver maximalt två omavvägningar.

Det finns ytterligare ett test som är vanligt förekommande, men som vi inte har berört. Det är test av grundmedelfelet i utjämnings. Anledningen till detta är att det precisionsmått som här förordats, nämligen medelfelen i utjämnade höjdskillnader, är mer heltäckande. Genom att ställa upp gränser för hur stora dessa medelfel får vara för olika tåglängder och applikationer, kan man kontrollera både nätets geometri och precisionen i mätningarna — dvs nätprecisionen — medan test av grundmedelfelet enbart är ett test av mätprecisionen.

Man bör dock kontrollera att det skattade grundmedelfelet inte avviker alltför mycket från a priorivärdet σ_0 . Om så är fallet bör det antagna σ_0 omprövas.

SAMMÄNSTÄLLNING AV ANALYSFÖRFARANDET

Om de tester, delanalyser och noggrannhetsuppskattningar som har beskrivits ställs samman i den ordning de kommer in i processen, får vi följande (förslag till) metodik för analys av avvägningsnät — från planläggningskedet, via mätning till beräkning och redovisning.

- . Ansätt ett apriorivärde på σ_0 , den antagna mätprecisionen, och besluta vilka nivåer α och β som ska tillämpas.
- . Formulera kraven på slutprodukten precision och tillförlitlighet om detta inte regleras av någon bestämmelse eller förordning.
- . Planera nätet och kontrollera med överslagsformlerna att nätkonfigurationen och mätplanen uppfyller ställda noggrannhetskrav.
- . Utför mätningarna och, om dubbelmätning tillämpas, analysera avvikelser mellan tur- och retur-mätningar direkt i fält.
- . Bilda polygoner och kontrollera slutningsfel (om möjligt redan i samband med fältarbetet för att reducera kostnaden för eventuella ytterligare ommätningar).
- . Utjämna nätet utan tvång — dvs som "fritt nät" med endast en fast punkt — och analysera förbättringar med data-snooping.
- . D:o med alla kända punkter fasta.

- . Redovisa slutresultatet inklusive uppgifter om dess precision och tillförlitlighet.
- . Redovisa slutligen eventuella (smärre) avvikelser från uppställda krav, och om möjligt också orsaken till dessa.

I förhållande till TFA innebär det här angivna förfarandet dels fler typer av tester, dvs större möjligheter att hitta fel, dels tester som är bättre anpassade till det aktuella nätet. Vid den förestående översynen av TFA kommer detta att beaktas, och metoden i tillämpliga delar att ingå i den nya versionen.